TEXTOS INICIALES

MATEMÁTICA

AUTORES

- José A. Villella
- Rosa A. Ferragina
- Leonardo J. Lupinacci
- Fernando J. Bifano
- Alejandra Almirón

COAUTORES

- Marcelo L. Aranda
- M. Carolina Benito
- Rosa M. Grejcaruk
- Roberto D. Moyano
- Mónica G. Real
- Mariana N. Viale

Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Nuevos encuentros matemáticos de tipos múltiples / José A. Villella ... [et al.] ;
contribuciones de Marcelo L. Aranda ... [et al.]. - 1a ed . - Florencio Varela :
Universidad
Nacional Arturo Jauretche, 2016.
220 p. ; 24 x 17 cm.

ISBN 978-987-3679-12-4

1. Matemática. I. Villella, José A. II. Aranda, Marcelo L. , colab.
CDD 510

Universidad Nacional Arturo Jauretche
Rector: **Lic. Ernesto Villanueva**
Director Editorial: Lic. Alejandro Mezzadri

Directora del Instituto de Estudios Iniciales: Dra. Carolina González Velasco
Coordinador del Curso de Preparación Universitaria (CPU): Lic. Leandro Larison
Nuevos Encuentros matemáticos de tipos múltiples

Diseño interior y tapa: Mariela Ponce

Realización Editorial:
Universidad Nacional Arturo Jauretche
Av. Calchaquí 6200 (CP 1888)
Florencio Varela - Buenos Aires
Tel.: 011 4275-6175
editorial@unaj.edu.ar

Impreso en la Argentina

Universidad Nacional Arturo Jauretche

Nuevos encuentros matemáticos de tipos múltiples

Autores
José A. Villella
Rosa A. Ferragina
Leonardo J. Lupinacci
Fernando J. Bifano
Alejandra Almirón

Coautores:
Marcelo L. Aranda
M. Carolina Benito
Rosa M. Grejcaruk
Roberto D. Moyano
Mónica G. Real
Mariana N. Viale

ÍNDICE

PRÓLOGO

Cuando hablamos de la matemática en reuniones donde la mayoría de los asistentes no son matemáticos o no se dedican a enseñarla, aparecen anécdotas llenas de cierta hilaridad que nos remontan a los años de escolaridad obligatoria en que se nos hacía recitar la interminable lista de propiedades de esas formas, que con el transcurrir de los días de clase se transformaban en esas “ malditas ” formas llamadas *triángulos*, *cuadrados* o *paralelepípedos,* y que parecían tener más cualidades que las que bajo el rótulo de *adjetivo calificativo* le podíamos colocar a un personaje de historieta, a un auto de carrera que nos apasionaba, a la jugada magistral de un goleador o a las nunca bien ponderadas bondades físicas y, algunas veces, pocas, de las artísticas de aquel actor o actriz que nos emocionaba en el cine o por la televisión. Y ni qué hablar si de números se trataba: lo de sumar, restar, multiplicar y dividir todavía...pero eso de extraer factores fuera del radical, calcular logaritmos, dar el resultado de elevar a la menos un cuarto la diferencia entre siete y el logaritmo natural de 8; no poder aplicar la propiedad distributiva a cualquier expresión dada entre paréntesis o empezar a sumar por las decenas o a dividir por las unidades sin que nadie se enojara ilustran el repertorio por demás completo de situaciones que ahora nos divierten, pero, en su momento, hicieron que más de uno se creyera incapaz de resolverlas y, por momentos, hasta desprovisto de toda clase posible de recursos inteligentes con los cuales hacerles frente.

A algunos de nosotros, vaya a saber vacunados con qué dosis (por el momento no letal y por eso pudimos reunirnos a escribir este libro) de cierto afrodisíaco matemático, todo aquello nos ha llevado a preguntarnos una y otra vez: ¿cómo hacer una matemática más atrapante?, ¿cómo compartir con las ocasionales víctimas del fastidio y el asedio de incomprensibles enunciados (y por qué no, algunas veces inútiles) el placer que nosotros sentimos al desarrollar los contenidos de la matemática que deleita a chicos y grandes porque los hace disfrutar de su peculiar manera de ver la realidad?, ¿en qué rincón de los viejos libros, en qué archivo del CD, en qué software..., dónde puede buscarse el conjunto de contenidos que conforman esta disciplina escolar presente en los diseños curriculares de todas las épocas, las modalidades y los niveles educativos?

Ya en 1971, Courant y Robins solían hacernos pensar acerca de que parece existir un serio peligro en el predominio del carácter axiomático de la matemática que se trabaja en la escuela, algo así como una amenaza para su esencia que aparece contenida en la afirmación de que no es nada más que un sistema de conclusiones derivadas de definiciones y postulados que deben ser compatibles pero que, por lo demás, pueden ser creación de la libre voluntad del matemático. Si esta descripción fuera exacta, la matemática no podría interesar a ninguna persona inteligente. Sería un juego con definiciones, reglas y silogismos sin meta ni motivo alguno; por eso afirmamos que la matemática está presente en una variedad de situaciones de la vida cotidiana, del mundo concreto, de aquel que el célebre matemático Puig Adam definió como el mundo observable, el que impresiona directamente los sentidos y al mismo tiempo invita a actuar.

Los problemas de la realidad son, a menudo, (por no asegurar que siempre) multivariables y su modelización no resulta inmediata como aquellos que resolvemos en la escuela. Por ejemplo: dos obreros trabajan durante 8 horas levantando la mitad de una pared, ¿cuánto tardará uno de ellos terminar el trabajo? Para resolverlo con el modelo de la proporcionalidad que estudiamos en la escuela solemos agregar que siempre lo hacen al mismo ritmo, que nunca se detienen, que los dos cumplen con su parte del trabajo, etc., aunque en la realidad es probable que uno de ellos alcance para hacer el trabajo mientras otro pueda cebarle unos ricos mates…

En este apasionante mundo que habitamos, donde Cochinchina (en Asia) y La Quiaca (en América del Sur) son vecinas de Madrid (en Europa) mientras que hace un tiempo, cuando queríamos hacer referencia a un lugar lejano, decíamos que se encontraba en aquella región de Vietnam del Sur, o en esa ciudad del norte de la Argentina; en este insospechado mundo donde crecen coliflores gigantes o las Dunas del Nilo avanzan a una velocidad de 10 metros por año que parecen devorar caminos y rutas. Hoy, Internet nos ha convertido en ciudadanos del mundo, casi deslocalizados, en relación constante con amigos, colegas, investigaciones y productos que están a enormes distancias –no necesitamos precisar cuáles– de nuestros hogares, tan próximos como la fibra lo permita o el coaxil lo determine. Las distancias se han acortado, crece la comunidad, el entorno se hace cada vez mayor y los avances –también los grandes retrocesos– forman parte del cotidiano donde desarrollamos nuestra actividad. Los límites del mundo nos llevan a la solidaridad, a la comunicación de ideas, al compartir las producciones y es en esta realidad a catorce años del comienzo del nuevo siglo, o si se prefiere en el año 2964 junto a los Bereber del Norte de África; en el 2557 del calendario budista; en el 4711 de los chinos; en el 5774 de los hebreos o en el 2007 de los etíopes, donde se nos ocurre preguntar: ¿qué nueva Tierra tenemos que medir?, ¿con qué números expresaremos los montos de dinero que se manejan en las bolsas de comercio de las grandes potencias?, ¿podremos predecir el año de nuestra muerte?, ¿cuándo se gana la lotería?... La tecnología ha puesto a nuestro alcance un mundo que hace unos años hubiera sido impensable, inimaginable, solo digno de libros de ciencia ficción. Es claro que el mundo está cambiando, que las ideas se están transformando, que todo evoluciona y que es necesario pensar, meditar y analizar estos cambios y entre otros, los cambios más importantes deberán darse desde la educación, para que a futuro la matemática, divina creación del hombre, nutra y se nutra de la realidad, de quien depende y a quien enriquece a diario. Lo importante es conseguir tener ideas y con ellas intentar el crecimiento.

En el espacio curricular de la Matemática de los Estudios Iniciales de la Universidad Nacional Arturo Jauretche, nos interesa ayudar a los alumnos en la detección y el uso de lo que han aprendido a lo largo de la escolaridad secundaria para ser capaces de analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando se hacen cargo de una situación y pueden diseñar, probar, evaluar, resolver y comunicar la solución y el procedimiento satisfactoriamente.

En los capítulos que conforman este libro, presentados con títulos “de pocas palabras matemáticas” pero “llenos de sentido matemático”, proponemos un trabajo que involucra:

Las componentes de la estructura formal del pensamiento.

La complejidad proveniente del espacio que da razón de ser a la geometría.

La multiplicidad que da sentido al estudio del número.

El cambio y la causalidad determinística.

La utilización del lenguaje simbólico.

La incertidumbre en la causalidad múltiple incontrolable.

Asumimos que el conocimiento matemático no se genera de modo rápido, acabado y completo, y que en el diseño de las respuestas a las variadas situaciones planteadas, cada lector podrá mostrar su grado de apropiación de los saberes, atravesando estadios que harán visibles el uso de los contenidos elementales y las competencias básicas aprendidas en la escuela primaria y media; el significado de los conocimientos necesarios para desenvolverse en el medio social y la utilización de conocimientos matemáticos complejos.

Esperamos que al terminar su recorrido, los lectores hayan disfrutado de su trabajo así como nosotros lo hemos hecho al escribirlo. Compartimos el desafío, junto con el resto de profesores que conformamos el Instituto de Estudios Iniciales de la Universidad Nacional Arturo Jauretche, de acompañarlos a transitar los primeros pasos en la vida universitaria. Desde nuestro rol como docentes de matemática, esperamos contribuir a derrumbar el mito de esa ciencia exclusiva, sólo para algunos, para que uds. la usen cuando la precisen.

Los autores

CAPÍTULO 1

Estar vivo es antinatural

O de cómo el objeto de la ciencia no es una combinación de cosas dadas naturalmente

José Villella

1.1. Introducción

En el libro *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo. El poder y la belleza de las matemáticas,* de Michael Guillen, publicado por editorial Temas de Debate en su versión en castellano en Madrid en 1999 (después de su versión original, en inglés *Five equations that changed the world,* publicada en 1995), entre las páginas 11 y 15, su autor escribe, entre otras, las siguientes ideas que transcribimos:

> *"Las matemáticas son un lenguaje […] que ha hecho posible logros que en tiempos parecieron imposibles; la electricidad, los aviones, las bombas nucleares, el descenso del hombre en la Luna, y la comprensión de la naturaleza de la vida y de la muerte. […] En el lenguaje de las matemáticas, las ecuaciones son como la poesía; establecen verdades con una precisión única, comportan grandes volúmenes de información en términos más bien breves y, por lo general, son difíciles de comprender por el no iniciado. Y así como la poesía nos ayuda a ver profundamente en nuestro interior, la poética matemática nos ayuda a ver mucho más allá de nosotros mismos; si no tanto como para llevarnos hasta el cielo, sí por lo menos hasta el mismo límite del universo visible. […] Es imposible comprender el auténtico significado de una ecuación, o apreciar su belleza, a menos que se lea en el lenguaje deliciosamente caprichoso en el*

cual se escribió. […] En este libro describo […] ecuaciones cuyos efectos secundarios han alterado de manera permanente nuestras vidas cotidianas.

Podría decirse estoy ofreciendo al público una dosis más fuerte de alfabetización numérica, una oportunidad de familiarizarse cómodamente con las cinco fórmulas más notables bajo su forma original y sin disfraces. […] Espero que el ojeador que no sabe de números no se sienta asustado y repelido por el celo de mi esfuerzo. Que le quede claro que aunque estas cinco ecuaciones parezcan abstractas, con absoluta seguridad no lo son sus consecuencias, como tampoco lo son las personas relacionadas con ellas. […] Cada historia está estructurada en cinco partes. El prólogo relata algún incidente llamativo de la vida del personaje y que contribuye a dar el tono de lo que vendrá después. Luego vienen tres actos a los que denomino Veni, Vidi, Vici. *Son las palabras latinas que se cree que dijo César después de derrotar al rey asiático Farnazes, y quieren decir* llegué, vi,vencí. *En* Veni *es donde explico cómo el personaje, "el científico", llega a su misterioso tema; el* Vidi *explica históricamente cómo al asunto llegó a aparentar ser tan enigmático;* Vici *explica cómo hizo el científico para aclarar el misterio dando como resultado una ecuación histórica. Finalmente, el epílogo describe como esa ecuación nos ha cambiado la vida para siempre. […]Seleccioné cinco ecuaciones […] para dar al lector una crónica prácticamente ininterrumpida de la ciencia y de la sociedad del siglo XVII hasta el presente.*

Resulta ser un período crucial de la historia. Científicamente abarca desde los inicios de la llamada Revolución científica y pasa por la Edad de la Razón, la Ilustración, la ideología y el análisis, épocas en las cuales la ciencia fue desmitificando cada uno de los antiguos cinco elementos; tierra, agua, fuego, aire y éter.

Lo que es más; en ese período crítico vemos a Dios desterrado para siempre de la ciencia, a la ciencia reemplazando *a la astrología como principal manera de predecir el futuro, a la ciencia convirtiéndose en una profesión remunerada y a la ciencia intentando resolver los asuntos ultra misteriosos de la vida y la muerte, del espacio y del tiempo.*

En estas cinco historias, desde la época en que un introspectivo y joven Isaac Newton se sienta serenamente bajo un frutal hasta que el inquisitivo Albert Einstein casi se mata escalando los Alpes suizos, vemos a la ciencia encaminándose desde la famosa manzana hasta la infame bomba A. O lo que es lo mismo vemos a la ciencia pasar de ser una fuente de luz y de esperanza a ser una fuente de oscuridad y de temor. La excepción es la ecuación de la energía de Einstein $\boldsymbol{E= m \times c^2}$ *de la que mucha gente ya sabe que, en cierto modo, es responsable de las bombas nucleares. Pero aun siendo tan famosa, esta inicua ecuación sigue siendo poco más que un ícono misterioso en la mente de la mayor parte de la gente. [...]¿Qué representan exactamente las letras E, m, y c? ¿Por qué está la c elevada al cuadrado? ¿Qué significa que la* E *se iguale a* $\mathrm{m \times c^2}$*? [...] Los demás capítulos tratan de científicos menos conocidos que Einstein pero que no son menos importantes para la historia de nuestra civilización. «Entre una roca y una dura vida», se ocupa del físico Daniel Bernoulli y de su ecuación hidrodinámica* $\boldsymbol{P + \rho \times \frac{1}{2} v^2 =}$ ***CONSTANTE*** *que en último extremo, originó los modernos aviones. «Cuestión de clase» se refiere al químico británico Michael Faraday y a su ecuación electromagnética:* $\boldsymbol{V\times E = -\sigma B/\sigma t}$ *que dio origen a la electricidad. «Manzanas y naranjas» cuenta la historia del filósofo de la naturaleza Isaac Newton y de su ecuación gravitatoria* $\boldsymbol{F = G \times M \times m / d^2}$ *que no dio origen a ningún invento específico sino a un acontecimiento épico; la llegada del hombre a la Luna.*

Finalmente «Una experiencia nada provechosa» se refiere al físico alemán Rudolf Julius Emmanuel Clausius y su ecuación termodinámica, o más exactamente, a su desigualdad termodinámica $\Delta \boldsymbol{S}_{\textit{universo}} > \boldsymbol{0}$*. No dio origen a ningún invento histórico ni a ningún acontecimiento, sino a una conclusión sorprendente; contrariamente* *a lo que suele creerse comúnmente estar vivo es antinatural; lo cierto es que toda vida existe desafiando la ley más fundamental del Universo y no en conformidad con ella.*

También en este libro verán los lectores una corroboración espectacular de la teoría de que las matemáticas son un perro excepcionalmente ultrasensible y de aguda vista. Si no, ¿cómo podemos siquiera explicar las infalibles proezas y la tenacidad con la que estos cinco matemáticos fueron capaces de encontrar el rastro, por así decir, y apuntar hacia sus respectivas ecuaciones?

Sin embargo, así como las ecuaciones representan el discernimiento de verdades eternas y universales, su expresión escrita es estrictamente humana y provinciana. Por eso es por lo que se parecen a poemas, intentos maravillosamente ingeniosos de hacer comprensibles a los seres finitos las realidades infinitas. [...]".

Nuestra intención es acercar al lector algunas ideas sobre la matemática como ciencia y cómo este concepto ha ido variando en función de la cultura de la época en la que se lo fue usando.

1.2. Cuando una ecuación puede cambiar al mundo: ¿la potencia matemática?

El título del libro de Guillen permite entender una posición acerca del rol protagónico que el autor le da a la ciencia –en este caso a la matemática– en lo referido a los cambios producidos en la vida de las personas a partir de los descubrimientos que ella hace. Esta relación entre ciencia y cambios en el mundo remite a la idea de la ciencia como un producto de la cultura, como una construcción humana, una institución progresivamente elaborada, históricamente condicionada e inseparable de las demás instituciones o actividades humanas, aun cuando en nuestra cultura, la idea misma de tratar a la ciencia como una realidad cultural, comparable a las demás realidades culturales, sigue tropezando con fuertes resistencias (Thuillier, 1990).

En la introducción del libro se intenta definir por analogía a la matemática como una poesía: *"La poesía es, sencillamente, la forma más bella, impresionante y efectiva, de decir las cosas"*, con el cual el autor parece querer completar el título del libro dando su posición respecto de lo que él considera que es la matemática. Y vuelve a reafirmarlo en la primera oración de esa introducción cuando dice: *"Las matemáticas son un lenguaje..."*.

Es indudable el importante papel que desempeña la ciencia en la sociedad contemporánea, no solo en lo que respecta a sus aplicaciones tecnológicas, sino también por el cambio conceptual que ha inducido en nuestra comprensión del universo y de las comunidades humanas. La tarea de comprender qué es la ciencia importa porque a la vez es comprender nuestra época, nuestro destino, y en cierto modo comprendernos nosotros mismos. Pero en este intento de explicación parece poco atinado dejarse seducir por los progresos de la ciencia presentados de manera demasiado simplista, demasiado dogmática, dado que el funcionamiento social e ideológico de esa misma ciencia –actividad nutrida eminentemente por la imaginación– requeriría ser escrutado, evaluado y vigilado mucho más atentamente en tanto las actividades científicas se nos aparecen como tributarias de una inagotable serie de factores filosóficos, religiosos, políticos, económicos, estéticos, entre otros.

La fuerza que el autor transmite en el título del libro, en el texto de la Introducción y en los capítulos que lo conforman, permite encarar un esbozo de reflexión acerca de lo que otros autores consideran como conocimiento científico provocando de esta manera, un comienzo de debate, que bien puede iniciarse desde el título de este capítulo.

P1. Para ponernos de acuerdo.

Esbocemos, entre todos, qué entendemos por los conceptos: cultura, ciencia, conocimiento científico y matemática. Luego, elaborá un texto que refleje lo que se ha acordado.

1.3. Estar vivo: ¿es antinatural? Un paseo por la matemática

Estar vivo es antinatural es la conclusión a la que Guillen llega después de analizar la desigualdad termodinámica de Clausius: $\Delta \boldsymbol{S}_{\textit{universo}} > \boldsymbol{0}$. Su elección como título de este capítulo se debe a la búsqueda de contrastes entre el absoluto poder que Guillen le endilga a la matemática en tanto ciencia desde el título de su obra y la que nosotros le concebimos en coincidencia con Thuillier:

> *"Aunque haya excepciones, nuestra cultura, en la hora actual, nos enseña esencialmente a venerar la ciencia, a admirar a sus representantes. Quizás es tiempo de aprender también a mirar con menos complacencia una institución que cada vez está más presente en todos los sectores de nuestra vida y manifiesta lo que bien puede llamarse* tendencias imperialistas.*[...]En resumen, como en lo relativo a todas las potencias de este mundo, más vale cierta falta de respeto que una ciega idolatría."* (Thuillier, 1990: 15)

De allí la aclaración casi redundante pero por demás desafiante del subtítulo: *El objeto de la ciencia no es una combinación de cosas dadas naturalmente*, que se cita textualmente del libro *Mundos posibles. El nacimiento de una nueva mentalidad científica*, de Hans Sandkühler.

En las líneas que siguen, se intenta sentar las bases para la conformación de ese debate.

Antes de avanzar y para compartir en grupo (lo que proponemos a lo largo de todo este capítulo), nuevamente nos pondremos de acuerdo sobre los siguientes puntos:

P2. ¿Por qué la matemática es tan importante para la actividad humana?

P3. ¿Es posible concebir el progreso científico y tecnológico sin los aportes de la matemática? ¿Por qué?

P4. Si recordás lo que estudiamos en la escuela primaria y en el nivel secundario, podremos hacer listas de contenidos como la que sigue:

- Números naturales, enteros, racionales, reales.
- Figuras en el plano y en el espacio.
- Perímetro y superficie.
- Volumen y capacidad.
- Estadística y probabilidad.
- Funciones.
- Polinomios.

a) Escribí al lado de cada uno de esos ítems una breve explicación de su contenido.

b) ¿En qué acción de la vida cotidiana ha sido/fue importante el conocimiento de estos ítems? Redactamos la respuesta en pocas oraciones.

c) ¿Podrías agregar ítems a la lista? ¿Por qué te resultaron imprescindibles de ser incorporados?

d) ¿Cuál de los ítems resulta ser el más aplicable a la vida cotidiana? ¿Cuál el menos aplicable? ¿Por qué? ¿Hay coincidencia en el grupo sobre este tema?

Dijimos, en oraciones anteriores, que el autor del libro cuya introducción se está analizando, parece considerar a la matemática como una ciencia por demás poderosa, dado que el subtítulo de su trabajo la hace autora de las *"ecuaciones que cambiaron el mundo"*.

P5. ¿Cómo definirías vos una ecuación? ¿Tus compañeros coinciden con esa caracterización? ¿Por qué?

1.4. Hacia una definición de matemática

A continuación, recorreremos las distintas definiciones que la matemática tuvo a lo largo del tiempo en relación con su posición en la teoría del conocimiento.

Existen varias definiciones para esta ciencia que hoy estamos estudiando. Las podemos agrupar en tres grandes grupos o puntos de vista: el logicista, el intuicionista y el formalista.

Desde el punto de vista logicista, la matemática se basa con exclusividad en la lógica y por ende está exenta de toda apelación a la intuición. Se la concibe como un receptáculo de proposiciones conectadas entre sí por los vínculos provistos por la lógica proposicional, lo que obliga a quien se dedica a la ciencia matemática a sistematizar las proposiciones de modo que puedan constituir teorías deductivas.

Desde el punto de vista intuicionista, Brouwer recalca que la misma lógica es arbitraria, dependiente del tiempo, no universal y por ende la matemática no resulta de basarse en ella sino en la intuición que soporta todo tipo de actividad del hombre. Es así como junto con el lenguaje y las otras ciencias se fundan las funciones del pensamiento humano que permiten al hombre poner orden en su mundo y regir la naturaleza circundante mediante tres tipos de categorías: la actividad matemática de la mente, la capacidad de abstracción y la expresión de lo pensado mediante los signos.

Desde el punto de vista formal, Hilbert (su más conocido defensor) parece intentar terciar entre las dos posturas descriptas introduciendo a la controversia el concepto de *forma*. Para él la matemática es una teoría intelectual deductiva que puede originarse en abstracciones surgidas de lo empírico como crearse mediante postulaciones arbitrarias que solo se autolimita por la exigencia de la compatibilidad o consistencia de aquello que enuncia.

P6. Tomando en consideración esta suerte de taxonomía/clasificación: ¿cuál es la que refleja más atinadamente la matemática que recuerdas cuando de ella se habla en reuniones sociales?, ¿a qué se puede atribuir ese recuerdo?

1.5. Los conocimientos matemáticos que aprendemos

En consonancia con las tres visiones de la matemática que hemos descripto en el apartado anterior, es prácticamente ineludible afirmar que la adquisición progresiva de esta ciencia se basa en tres tipos de conocimientos diferentes entre sí: los que provienen de la experiencia, los que surgen de la intuición y aquellos que pueden deducirse a partir de otros (Campos, 1978).

Son conocimientos experimentales los de la práctica, de los sentidos, los del laboratorio. Una relación matemática es verdadera experimentalmente cuando sabemos de ella que es un caso particular de una teoría que no conocemos como tal, sino solo como información básica. También lo es cuando se la obtiene por comparación con un modelo definido como: una esquematización construida con una multiplicidad de datos de la realidad o de *la* experiencia que proporcionan una abstracción satisfactoria de cómo funcionan las cosas. El modelo ofrece al usuario que está frente a una situación problemática para resolver, un sustituto del original que por, sus cualidades, está mejor adaptado al nivel de razonamiento que este tiene respecto del contenido en cuestión. Para clarificar esta sustitución podemos decir que los matemáticos no estudian objetos, sino las relaciones entre los objetos; por lo tanto, le es indiferente reemplazar estos objetos por otros, con tal que no cambien las relaciones.

Respecto del rol de la intuición, Bourbaki dice:

> “*El matemático no trabaja maquinalmente como el obrero de la fábrica; nunca se insistirá demasiado sobre el papel fundamental que juega, en sus investigaciones, una intuición particular (intuición que por cierto se equivoca frecuentemente como toda intuición), que no es la intuición vulgar y sensible, sino más bien una especie de adivinación directa (anterior a todo razonamiento) del comportamiento normal que parece tener el derecho de esperar, de parte de los seres matemáticos, que una prolongada frecuentación le ha hecho casi tan familiares como los seres del mundo real*” (Blanchard, 1962: 42).

Cabe recordar que los objetos matemáticos no son copias de los objetos reales, sino representaciones mentales de un objeto o de una relación a partir de lo sensible, aislando ciertas propiedades. De esta forma una relación matemática intuitivamente verdadera es una verdad experimental generalizable o una explicación que parece cobijar otros casos particulares de los ya constatados o también una relación matemática para la cual es posible una demostración en el sentido de que se tiene una idea de cómo insertarla en un contexto demostrativo.

A partir de la axiomatización se construye una cadena de implicaciones que lleva de unos enunciados dados hasta otro que presumimos en un teorema y que lo será cuando la cadena quede construida. Una *relación matemática axiomáticamente verdadera* dentro de una teoría es una relación matemática para la cual hay una demostración, es decir, una serie de implicaciones desde los primeros principios hasta ella.

P7. Tomando en cuenta estos tipos de conocimiento descriptos:

a) ¿Cómo podrían clasificarse cada uno de los ítems de la lista del problema 4?

b) ¿Hay algún ítem de ese problema que pueda pertenecer a más de una de las categorías?, ¿por qué?

1.6. Acerca del uso de la matemática

La matemática parece ser algo más que una traductora de fenómenos naturales, no solo involucra prácticas convencionales como la contrastación, la medición y la experimentación, también conlleva entidades o constructos científicos tales como conceptos, leyes y teorías (Diez y Moulines, 1999). A ellos apela Guillen cuando coloca en las ecuaciones matemáticas (expresión simbólica de conceptos, leyes y teorías) el fundamento de la creación de elementos que mejoraron el mundo. Los conceptos así representados se muestran como las unidades más básicas de esta forma de conocimiento científico y, expresados mediante relaciones de símbolos en ecuaciones, se constituyen en entidades a las que las personas tenemos acceso y podemos usar.

P8. a) ¿Qué opinión te merecen las afirmaciones de Guillen respecto de las ecuaciones que cambiaron el mundo? ¿Por qué?

b) ¿Existe alguna ecuación que te haya cambiado o impactado en tu vida? ¿Por qué?

c) ¿Qué sería para vos una ecuación que cambie el estado de las cosas, la rutina, lo establecido? ¿Por qué?

P9. Alguna vez leímos que una ecuación es un conjunto de letras relacionadas de acuerdo con alguna regla particular, que generaliza una situación que podía ser descripta con números en forma particular.

Argumentá a favor o en contra de lo escrito. ¿Coincide lo escrito en el párrafo anterior con tu definición de ecuación dada en el problema 5? ¿Por qué? Da ejemplos.

Guillen presenta los conceptos como entidades no localizadas espacio-temporalmente como los objetos físicos, que a partir de ellos se pueden construir, sino como entidades abstractas: "*Espero que el ojeador que no sabe de números no se sienta asustado y repelido por el celo de mi esfuerzo. Que le quede claro que aunque estas cinco ecuaciones parezcan abstractas, con absoluta seguridad no lo son sus consecuencias, como tampoco lo son las personas relacionadas con ellas; un solitario enfermizo y ansioso de amor, un prodigio maltratado emocionalmente y procedente de una familia deshecha, un analfabeto religioso y asediado por la pobreza, un viudo de voz dulce que vivió en una época peligrosa, y un estudiante pagado de sí mismo que abandonó el instituto antes de tiempo*".

El saber relativo a una actividad no se agota en practicarla: es necesario saber en qué consiste esa práctica y por lo tanto en ser capaz de formular las reglas o principios que se siguen para su formulación. Lo primero parece no ser condición suficiente para lo segundo porque se puede realizar correctamente la práctica sin ser capaz de explicitar las reglas seguidas, si bien debemos suponer el conocimiento implícito de las reglas involucradas, como dice Guillen (1999: 12): "*[...] es imposible comprender el auténtico significado de una ecuación, o apreciar su belleza, a menos que se lea en el lenguaje deliciosamente caprichoso en el cual se escribió.*"

P10. Siguiendo con los fundamentos que venimos desarrollando:

a) ¿Qué es hacer matemática?

b) ¿El hacer matemática en la escuela, en la vida cotidiana o en el mundo científico tiene las mismas cualidades?, ¿por qué?

c) Enunciá por lo menos tres cualidades para cada una de las formas de hacer matemática nombradas en el ítem anterior.

d) Ejemplificá cada una de las formas de hacer matemática mencionadas en el ítem b.

e) ¿Considerás que alguna de las formas de hacer matemática enunciadas es jerárquicamente mejor que otra? ¿Será jerárquicamente más difícil una que otra? ¿Por qué?

1.7. Algunos efectos del uso de la matemática

La introducción de Guillen que nos sirve de eje para este capítulo, se caracteriza por la pretensión de llevar a cabo una determinada finalidad que él expresa diciendo: "*En este libro describo los orígenes de ciertos hitos, ecuaciones cuyos efectos secundarios han alterado de manera permanente nuestras vidas cotidianas. Podría decirse que estoy ofreciendo al público una dosis más fuerte de alfabetización numérica, una oportunidad de familiarizarse cómodamente con las cinco fórmulas más notables bajo su forma original y sin disfraces. Los lectores serán capaces de comprender por sí mismos el significado de las ecuaciones y no quedarse sencillamente con una traducción no matemática de esas ecuaciones, inevitablemente imperfectas.[...] descubrirán también cómo se llegó a cada una de esas ecuaciones[...]*".

Puede decirse que el saber científico que en este libro se transmite en forma de ecuaciones para completar la alfabetización matemática se construye sobre un basamento formado por un trípode del que participan: la red conceptual propia de este campo del conocimiento matemático; el método propio de la ciencia matemática y una tabla axiológica que pone de manifiesto que cada tipo de conocimiento se apoya en una tabla de valores. De esta forma los conceptos son elaborados mediante una referencia a la experiencia a través de la analogía tanto de conceptos que entre sí tienen algo que ver, como de conjuntos de términos o metáforas, así como también mediante la imaginación. De aquí que el lenguaje científico esté en constante evolución, o lo que es lo mismo, en un permanente proceso de revisión. No todos los componentes de una lengua dada son aptos para expresar conceptos. Quizás el paralelismo que puede hacerse entre el idioma y las ecuaciones usadas por Guillen lo demuestre cuando dice: "*...así como las ecuaciones representan el discernimiento de verdades eternas y universales, su expresión escrita es estrictamente humana y provinciana. Por eso es por lo que se parecen a poemas, intentos maravillosamente ingeniosos de hacer comprensibles a los seres finitos las realidades infinitas"*, intentando relativizar la importancia que él asigna a la matemática en tanto forma de comunicar verdades a partir de la consideración de que saber ciencia y saber qué es la ciencia, corresponden a niveles o ámbitos diferentes de conocimiento. Lo que sí resulta importante, a partir de la lectura de la introducción del libro, es que la ciencia sea estudiada como una realidad cultural, lo que permite descubrir las pasiones que la hacen vivir y los intereses varios que en ella se expresan.

Desde los principios de la que podemos considerar la cultura occidental, se produjo una marcada preocupación por hacer una distinción entre un conocimiento azaroso, de opinión, versátil, y otro que asegurase la adquisición de la verdad. Para algunos, en nuestros días, se sigue llamando *científico* al conocimiento cuya característica más importante es su rigor metodológico, la fundamentación de las afirmaciones, la búsqueda sistemática de la verdad, la verificación de los resultados, y se califica de n*o científico* el conocimiento que no da justificación de sus descubrimientos o aquellos cuyos resultados son declarados dogmáticamente verdaderos. El llamado *mundo sensible*, el mundo físico en el que nos movemos, deslumbró, en las distintas épocas, a la humanidad, que intentó describirlo, caracterizarlo, explicarlo, entenderlo, construyendo, a partir del lenguaje, un mapa que representa algunos de los rasgos de esa realidad que le impacta. Ese mapa, producto de la abstracción, encuentra en el lenguaje matemático, donde las palabras son reemplazadas por otros símbolos y las relaciones establecidas a partir de operaciones rigurosamente definidas, una útil manera de elaborar definiciones claras y conexiones no ambiguas que, a medida que se perfecciona, se va separando de esa realidad a la que intenta explicar.

P11. Ejemplificá la diferencia ente saber matemática y saber qué es la matemática.

P12. Escribí un ensayo breve que desarrolle el siguiente título: *Yo sé matemática*.

P13. Buscá en diarios, revistas, Internet u otras fuentes, imágenes que te permitan acompañar el ensayo del problema anterior.

1.8. Trabajando con ecuaciones

Es tiempo de volver a pensar si **el estar vivo es antinatural** cuando, aun después de varios esfuerzos, no pudimos alfabetizarnos matemáticamente; cuando no podemos asociar a $E = m \times c^2$ nuestra desazón por las muertes causadas por la bomba atómica; o no encontramos en $P + \rho \times \frac{1}{2} v^2 = CONSTANTE$ la fundamentación a lo inadecuado de nuestro temor frente a cada viaje en avión que debemos realizar.

En definitiva, si el impacto de la realidad solo puede explicarse a través de las grandes ecuaciones que cambiaron el mundo, cabe preguntarnos cuáles de ellas explicarán el continuo devenir de los acontecimientos, cuáles nos darán respuesta a la aventura diaria de vivir, y cuáles, a la manera del mundo oriental, permitirán entendernos como una totalidad no fragmentada en mente y cuerpo, como una integridad llamada *persona*.

P14. a) Buscá el significado de cada una de las letras que componen las siguientes ecuaciones: $E = m \times c^2$

$$P + \rho \times \frac{1}{2} v^2 = CONSTANTE$$

b) ¿Cómo puede explicarse cada una de ellas usando lenguaje coloquial?

c) ¿Por qué $P + \rho\, x\, ½\, v^2 = CONSTANTE$ nos permite explicarle a una persona que es inapropiado tener miedo a volar?

P15. Diremos que en el conjunto de los números naturales la igualdad $11=2x+1$, es la ecuación mediante la cual representamos la respuesta a la pregunta: ¿cuál es el número natural cuyo doble aumentado en una unidad es 11?

a) ¿Cómo cambia la pregunta si la ecuación es $y=2x+1$?

b) ¿Y si el conjunto numérico al que nos referimos es el de los racionales?

c) ¿Y si es el de los reales?, ¿por qué?

P16. a) Trabajaremos en el conjunto de los números naturales para averiguar el valor de x que satisfaga, en la ecuación $y= 2x+1$, si el valor de y es: 21, 3, 1, 2, 0; respectivamente.

b) ¿Cambian las respuestas anteriores si el conjunto de referencia es el de los reales?, ¿por qué?

P17. Sobre la base de las respuestas dadas a los problemas anteriores, asigná verdadero o falso a cada una de las siguientes expresiones. Escribí en cada caso la justificación correspondiente. Podés escribir un ejemplo o un contraejemplo para ilustrar la respuesta:

a) Hay ecuaciones que solo tienen una solución.

b) Hay ecuaciones que admiten muchas soluciones.

c) Hay ecuaciones que no admiten soluciones.

P18. Respondé:

a) ¿En qué expresión del problema anterior usaste ejemplos para ilustrar la respuesta?

b) ¿En cuáles contraejemplos?

c) ¿Por qué puede hacerse la distinción entre los ítems anteriores?

P19. Aplicá lo analizado en el problema 17 para encontrar la solución a cada una de las siguientes ecuaciones:

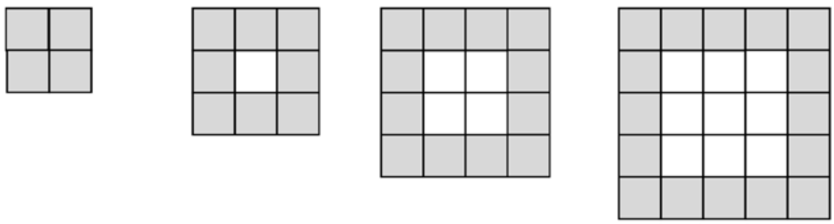
a) $3x + 5 = 7$ **b)** $z^2 - 6z + 5 = 0$ **c)** $t + 3 = t$ **d)** $\text{sen}(x) = 0$

P20. Respondé: ¿qué diferencia existe entre el conjunto solución de las ecuaciones del problema anterior y las siguientes? ¿Por qué?

a) $x - 2y = 2$ **b)** $x + 3y + 2z = 5$ **c)** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

P21. Observando las figuras:

a) Indicá qué lugar ocupa el cuadrado de la siguiente serie que tiene 128 cuadraditos pintados:



b) Escribí la ecuación que resuelve el problema.

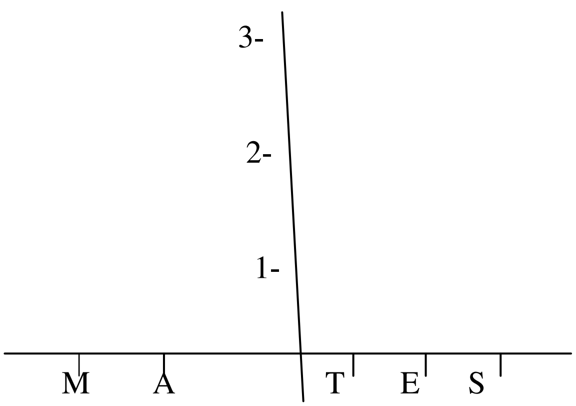
P22. Definimos como *cuadrado mágico* a aquel cuya suma de los valores de las columnas, las filas y las diagonales es la misma.

a) Escribí la igualdad que permite hacer que el siguiente sea un cuadrado mágico.

3(x +1)	*x/4*	*3x - 1*
x + 1	*2x + 1*	*3x + 1*
2x - 1	*4x + 1*	*x - 1*

b) Escribí una igualdad que no permita su resolución. Fundamentá la elección.

P23. Trazá sobre una hoja cuadriculada dos rectas perpendiculares (ejes de coordenadas con centro u origen en el punto de intersección de las rectas). En el eje horizontal marcar las letras *M*, *A*, *T*, *E*, *S* en cualquier punto y en el eje vertical los números *1*, *2*, *3*. El tablero que queda formado debería tener una vista aproximada al que mostramos a continuación:



Llamaremos *cruce* al punto de encuentro de una letra con un número. Así la letra *M*, al encontrarse con el número 3, dará un cruce (M, 3). Para hacerlo se deberán trazar rectas paralelas a la horizontal, que llamaremos *abscisa,* y la vertical, que llamaremos *ordenada*, que pase por cada una de las letras o los números.

a) ¿Cuántos cruces se pueden encontrar en el tablero mostrado?

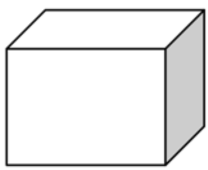
b) ¿Cómo puede identificarse cada uno de ellos? (tener en cuenta que, de acuerdo con el ejemplo, siempre escribiremos primero el dato de la abscisa y luego el de la ordenada).

P24. Supongamos que desde la entrada de la UNAJ se puede caminar 50 m hacia el este y luego 20m hacia el norte, lo que nos permite llegar al mostrador de Informaciones. Sin embargo, para ir al mostrador desde el estacionamiento deberíamos ir 60 m hacia el este y luego 20 m hacia el norte.

a) Dibujá en un sistema de rectas perpendiculares como el usado (al que llamaremos *sistema de coordenadas cartesianas*) la situación descripta.

b) Indicá las coordenadas de la entrada, del estacionamiento y del escritorio de información.

P25. Expresá las coordenadas cartesianas correspondientes a los vértices de un hexaedro regular (cubo) de 5 cm de arista. Tomá como eje de coordenadas uno de los vértices y como unidad, 1cm.



CAPÍTULO 2

King Kong no existe:

las locuras de la semejanza

José Villella

2.1. Introducción

Muchas veces nos fascinamos con películas en las cuales sus personajes aparecen a nuestros ojos como monstruos fantásticos, superhéroes de dimensiones asombrosas, gigantes que –si son de los buenos– hasta nos arrancan una sonrisa. Pero: ¿podrían existir tales seres? Las ciencias naturales nos ayudan a entender que cada especie sobrevive adaptándose a su entorno, a aquello que la rodea: se enfrenta y resuelve el problema que podemos asociar con la escala. Dicho de otro modo, se trata de que cada uno se adapte y sobreviva a los diferentes tamaños desde el nacimiento hasta el que adopta en su forma adulta. Ejemplos de lo dicho abundan:

- Los pandas al nacer pesan alrededor de 0,50 kg y en su edad adulta alrededor de 137,50 kg.

- Un potrillo recién nacido es más grande que el panda: necesita serlo para trasladarse junto con la manada de un lugar a otro; cuando se hace caballo adulto no puede pesar lo que un panda, obviamente.

- Han existido los mamuts, las ballenas azules, los dinosaurios… El ser humano alcanza como máximo el 1,90 – 2,00 m de alto, algo así como la 0,63 parte de la altura del mamut.

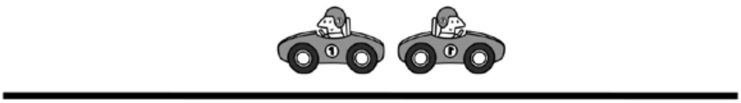
La no existencia de estos seres en la vida real se debe, obviamente, a las limitaciones físicas que tal existencia les depararía en el entorno donde viven y, con algunos principios de la geometría, esto puede aseverarse. De igual modo podremos mostrar cómo no podrían vivir manteniendo su forma en una escala diferente: sea esta mayor o menor. Estos principios se relacionan en el entramado que da idea de la semejanza. En geometría se dice que **dos objetos son semejantes si tienen la misma forma aunque el material de construcción sea distinto y el tamaño también**. Para que ello se cumpla, **los ángulos correspondientes deben ser iguales y las dimensiones relacionarse de acuerdo con un factor de proporcionalidad.**

Hemos usado en la definición anterior dos ideas: ángulos correspondientes y factor de proporcionalidad, que les proponemos recordar con mayor precisión.

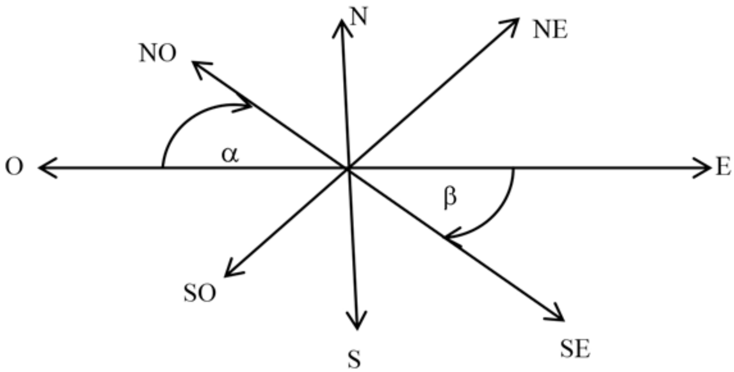
2.2. Hacia una definición de semejanza. El papel de los ángulos

En sus orígenes la matemática era utilizada como una herramienta para el comercio, la medición de tierras, el cálculo de la cantidad de animales… Así se afirma que los primeros conocimientos relacionados con ella se basaban en la experiencia y en las aplicaciones prácticas. Los babilonios, los egipcios y los chinos conocían en la Antigüedad reglas geométricas que les permitían calcular medidas de cuerpos, tanto sea los que existían en la realidad, como los dibujados sobre lienzos u hojas (los que conocemos como figuras de tres dimensiones y de dos dimensiones respectivamente). Fueron los griegos quienes detectaron la necesidad de las demostraciones para aseverar propiedades y Euclides el que, con regla y compás, desarrolló un amplio campo de conceptos. Si se observa con detenimiento el limpiaparabrisas del auto, se ve que se desplaza desde un punto fijo y determina un *ángulo de giro*.

P1. Observemos el siguiente esquema que se produce cuando se decide jugar en un tablero con dos autos. El juego consiste en hacer llegar cada auto al lugar que ocupa el otro. En el momento del comienzo del juego, ambos autos están colocados en las posiciones que se muestran:



Uno de los autos se mueve hacia el noroeste y el otro hacia el sudeste, generando el movimiento que marcamos en el esquema, donde el punto de intersección de todas las flechas es el que representa al punto de encuentro de los dos autos dibujados en el esquema anterior, y los arcos α y β dan cuenta del movimiento aludido



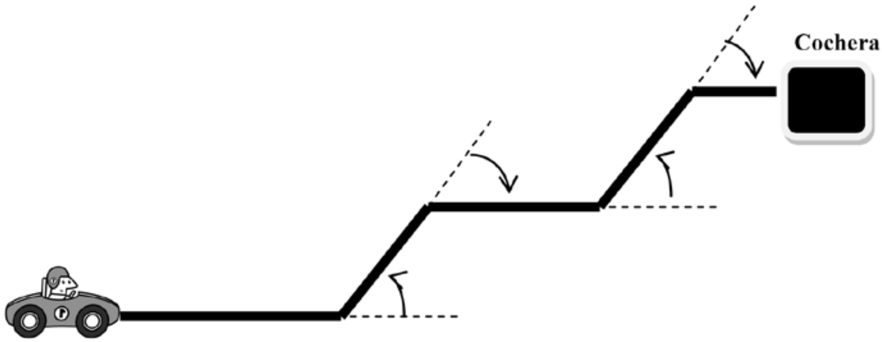
Esos arcos representan el **ángulo de giro** que ambos autos realizaron. Si sabemos que NS y OE son perpendiculares y que NOSE es bisectriz de los ángulos por cuyos vértices pasa, al igual que NESO (es decir que los corta en dos ángulos de igual medida), podemos responder:

a) ¿Cuánto mide el arco α?

b) ¿Cuánto mide el arco β?

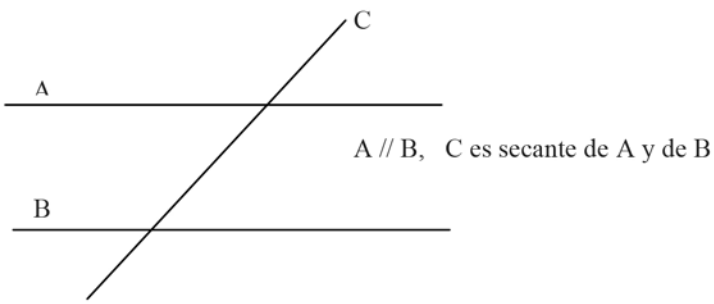
c) ¿Qué otras relaciones pueden determinarse entre las medidas de los arcos que esos autos realizan al girar?

d) Supongamos que uno de los autos, terminado el juego, es movido por su conductor siguiendo el tablero que mostramos, con la intención de llevarlo hasta el espacio denominado cochera. En el esquema hemos dibujado con líneas punteadas y arcos los ángulos de giros que tal desplazamiento exige.

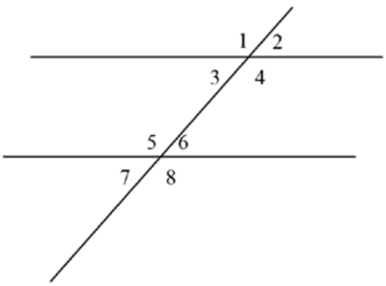


¿Cómo resultan ser esos ángulos de giro respecto de su amplitud? ¿Por qué?

En forma genérica, el esquema anterior puede ser representado por dos rectas paralelas cortadas por una transversal, así:



En el esquema anterior quedan determinados varios ángulos que llamamos con los números 1 al 8 y que, por pares, reciben nombres especiales.



2 y 6; 4 y 8; 1 y 5, 3 y 7 se llaman **ángulos correspondientes.**

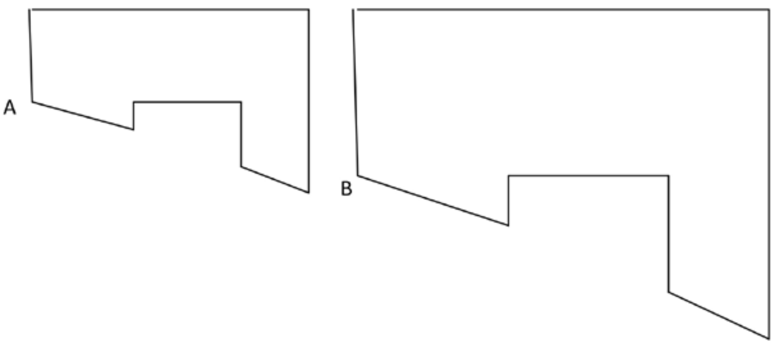
2 y 3; 1 y 4; 5 y 8; 6 y 7 se llaman **ángulos opuestos por el vértice**.

3 y 6; 4 y 5 se llaman **ángulos alternos internos.**

1 y 8; 2 y 7 se llaman **ángulos alternos externos.**

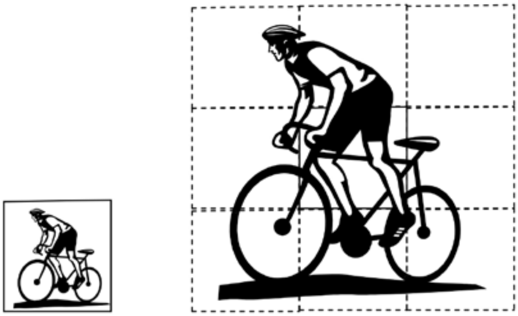
e) ¿Qué relación se puede establecer entre las medidas de esos pares de ángulos? ¿Influye esta respuesta cuando comparamos figuras y sus ángulos? ¿Por qué?

f) ¿Qué se puede decir del ángulo A y del ángulo B al comparar estas dos figuras? ¿Por qué?



2.3. Hacia una definición de semejanza. El factor de proporcionalidad.

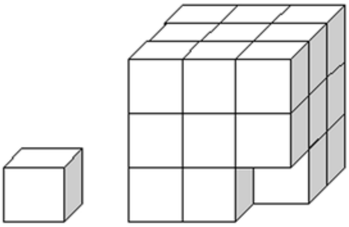
Si queremos ampliar el dibujo de la derecha, deberemos usar el mismo factor para ampliar tanto la dirección horizontal como vertical, y cualquier otra dirección. A este factor de ampliación suele llamárselo *factor de escala o de proporcionalidad*. Si elegimos que este sea 3, la ampliación resultante será tres veces más ancha y tres veces más alta que la original: cada par de puntos se transforma en un nuevo par de puntos cuya distancia es el triple que la distancia existente entre los puntos originales.



La ampliación puede dividirse en 9 rectángulos en filas y columnas de 3, cada uno de los cuales respeta el tamaño del original. De esta manera afirmaremos que la ampliación de la figura tiene 9 veces el área de la del original. Si hubiésemos elegido otro factor, por ejemplo 2, la ampliación resultaría 2 x 2 = 4 veces el área de la original y en forma genérica, si el factor de escala es un número cualquiera E, la ampliación tendrá un área de $\mathbf{E^2}$**.**

¿Sucederá lo mismo cuando trabajamos con objetos tridimensionales?

Si el factor de ampliación de un cubo de 1cm de arista es de 3, ¿cómo resulta el volumen del cubo ampliado? Si traducimos a un gráfico lo dicho, nos queda:



Es decir: tres veces más ancho, tres veces más largo y tres veces más alto que el original: 3 x 3 x 3. El factor de escala E en este caso hace que la ampliación tenga un volumen de $\mathbf{E}^3$.

Nos preguntamos, entonces: ¿se cumplen estas relaciones en los casos como los de King Kong que vemos en las películas?

La respuesta afirmativa a esta pregunta nos lleva a darnos cuenta del porqué de su inexistencia. Y si ahondamos en el análisis, llegaremos a que el área de cada cara del cubo es $3^2 = 9$ veces más grande que la de cualquiera de las caras del cubo original. ¡Dado que esto es cierto, se cumple que el área del cubo ampliado es 9 veces la del cubo original! ¡Menudo problema de tamaños! En tanto la ampliación de objetos tridimensionales requiere por parte del que ejecuta la acción el tomar en cuenta las medidas de su peso, las distancias entre dos puntos, el área, el volumen… y no olvidarse la unidad de medida en que se las toma.

El sistema métrico fue propuesto socialmente por el Vicario de Lyon –Francia– en 1670 y se adoptó como hoy lo conocemos en 1795. Gabriel Mouton, tal su nombre, propuso el metro como unidad fundamental de longitud y lo definió inicialmente como la diezmillonésima parte de la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador, medida sobre el meridiano que pasa por París. Más adelante fue redefinido como la distancia entre las dos líneas marcadas en una barra de platino iridiado que mantiene una temperatura constante de 0º y que se conserva en el Departamento Internacional de Pesas y Medidas de la capital francesa. En 1960 se lo volvió a definir como 1.650.763,73 veces la longitud de onda rojo-anaranjada emitida por los átomos del gas criptón-86 cuando a través de ellos pasa una carga eléctrica. El *kilogramo* se define como el peso estandarizado de un objeto de platino iridiado. Entonces:

¿Cuál sería la altura de King Kong? ¿Y su peso? ¿Por qué podemos afirmar que el tamaño de los objetos tridimensionales está limitado hasta un cierto valor?

Buscaremos esta última respuesta en los datos aportados por la física. Sabemos que los objetos del mundo real tienen masa –aspecto de la materia que los conforma y que sufre los efectos de las fuerzas–. Así, nuestra masa reacciona frente a la fuerza de la gravedad y hace que nos sintamos atraídos hacia la Tierra. Solemos tomar conciencia de este valor de masa cuando intentamos mover un objeto y aquella se nos muestra como el peso de dicho objeto.

Si tomamos un dado de forma cúbica de 1 cm de arista construido en madera y lo apoyamos sobre una de sus caras, podremos afirmar que esta soporta el peso del dado entero.

La presión ejercida sobre esa cara es la fuerza por unidad de área y se obtiene calculando la razón entre el peso del cubo y el área de la cara inferior:

$$Presión = \frac{Peso}{Área\ de\ la\ base}$$

En nuestro caso, ese valor de presión se obtiene dividiendo 10 g (el peso aproximado del dado de madera en cuestión) por el área de la cara inferior, que es de 1 cm^2. Esta presión es entonces de 10 g por cm^2.

Si, en cambio, el dado está hecho del mismo material, pero su arista es de 2 cm, el área de la cara apoyada sobre la mesa ha crecido con el cuadrado del factor de escala, es decir 4 cm^2.

Aplicando el mismo razonamiento, afirmaremos que el volumen de ese dado aumenta como el cubo del factor de escala, es decir 8 cm^3. Como ambos dados están hechos del mismo material, podemos decir que el dado grande tiene 8 veces más madera que el chico, es decir: pesa 8 veces más que el chico; 80 g. La presión ejercida sobre la base es el doble de la original. Así podremos afirmar que si E es el factor de escala, la presión del aumentado se obtiene multiplicando la del original por E.

Entonces: ¿qué presión ejercería King Kong sobre sus pies?

Si suponemos que el King Kong de la película es 30 veces más grande que el original, debería ser capaz de soportar un peso 30^3 veces mayor… ¡Imposible de soportar! ¡El hombre todavía no pudo construirlo!

Sin embargo, en la naturaleza, el problema de la escala suele superarse con, por lo menos, dos estrategias que las especies utilizan para adaptarse: el cambio de materiales y el cambio de forma. Los animales pequeños carecen de esqueletos que sí tienen los de mayor tamaño; los que tienen los mismos materiales constitutivos (ratón y perro, por ejemplo) son diferentes en tamaño.

¿Será esto lo que toma Shakespeare para describir a Ricardo III como un monstruo jorobado que tenía ventajas en los combates porque sus armaduras eran pequeñas? Para respondernos esa pregunta, hemos traducido algunos párrafos de las páginas 54 a 56 del texto de Horace Judson, titulado *The search for solutions*, editado en 1987 por la Johns Hopkins University Press, que transcribimos: *"Entre una persona alta y una baja la estatura aumenta linealmente, mientras que la superficie del cuerpo lo hace al cuadrado. Puesto que es la superficie del cuerpo lo que el constructor de la armadura debe forrar con acero, la armadura de Ricardo sería más ligera que la de un guerrero alto. Por tanto, la notoria efectividad en combate de Ricardo habría sido posible…debido a que su armadura le produce menos agobios. Para tener la máxima protección dentro de su peso, el caballero armado adoptaba dos estrategias: grosor variable y desviación. El hecho inesperado es que la armadura se hacía lo más delgada posible. El grosor, el reforzamiento y la dureza estructural de la gran superficie se concentraban en los lugares en que las armas de los oponentes golpeaban más a menudo. A partir de esos lugares fuertes y moldeados, el metal se hacía más estrecho, hasta que la hoja de acero era tan delgada como la tapa de una lata de sardinas."*

¿Cómo debería ser el traje de King Kong si en su interior hubiese una persona? ¿En qué cambia la respuesta anterior si en su interior hubiese una estructura de tipo robótica?

A pesar de que grandes cambios de escala implican cambios en los materiales o en la forma, dentro de límites pequeños (factores de hasta 20) las criaturas vivientes pueden crecer de acuerdo con una ley de semejanza: crecen y su forma se conserva. De todos modos, en los seres humanos se da que un adulto no es una versión ampliada del bebé. Así, en relación con la longitud de su cuerpo, la cabeza de un bebé es mucho más grande que la de un adulto. Los brazos de un bebé son "desproporcionadamente" más cortos que los de un adulto. A lo largo de los años, las diferentes partes del cuerpo se van ampliando con un factor de proporcionalidad diferente. Sin embargo, estas simples cuentas con observaciones precisas, son las que se usan para encontrar niños perdidos a lo largo de los años. Los técnicos en informática escanean fotografías de niños desaparecidos y la de un hermano mayor o la de su padre biológico cuando era niño. La imagen del niño perdido se agranda para reflejar el crecimiento cráneo facial y se la fusiona con la del hermano o la del padre. El resultado, es una aproximación bastante certera de cómo es ese niño en el momento actual de la búsqueda. Con los años, la matemática seguramente pulirá sus modelos para que estos resultados sean cada vez más precisos.

P2. Un gorila maduro pesa 400 libras y erguido tiene una altura de 5 pies (la fuente de estos datos es el *American Heritage Dictionary*).

a) ¿Cuál fue su peso cuando la altura fue de la mitad? ¿Por qué? ¿Qué condiciones deben expresarse para que la respuesta a la pregunta anterior resulte verdadera? ¿Por qué?

b) Si King Kong es un gorila ampliado con un factor de escala de 10, ¿cuál es su peso?

c) ¿Cuáles son las respuestas a las preguntas anteriores si las expresamos en el Sistema Métrico Legal Argentino?

2.4. Semejantes problemas…

Apliquemos lo analizado a la resolución de algunas situaciones:

P3. Supongamos que estamos imprimiendo fotografías a partir de negativos de 35 mm. Nos daremos cuenta de que los marcos reales de esa fotografías son de 24 x 36 mm. Entonces:

a) Una de las ampliaciones que se desea hacer es tres veces más alta y tres veces más ancha que el negativo, ¿cuál es el factor de escala de esa fotografía?

b) El tamaño de una fotografía de las llamadas de 3 x 5 puede variar, dependiendo de si tiene o no borde. ¿Cuál es en ese caso el factor de escala para la ampliación a partir del negativo?

c) El corte del papel fotográfico es proporcional al área del papel. Supongamos que se está comparando el costo de hacer ampliaciones de 3 x 5 con el de hacerlas en 4 x 6. Las fotografías pequeñas tienen un costo de U$S 1.5 y las grandes U$S 3.5. Teniendo en cuenta lo que desarrollamos acerca de los factores de escala y su influencia en las áreas, ¿qué ampliación conviene más?, ¿por qué?

P4. El área de un círculo puede expresarse en función de su diámetro como el producto entre π y el cuadrado del valor del radio. Si aplicamos un factor de escala E al diámetro del círculo, el área del círculo ampliado cambia con E^2. Una aplicación de esta idea se da cuando se considera el precio en el menú de una pizzería.

En ese tipo de locales suele haber pizzas chicas, medianas y grandes que responden a los diámetros de las bandejas en las que fueron hechas: 24 cm, 28 cm y 32 cm, respectivamente.

a) ¿Cuántas veces más grande es el área de una pizza grande comparada con una chica?

b) Averiguá el valor de una pizza chica en la pizzería más cercana: ¿qué suposiciones *escondidas* hace el pizzero en relación con los tamaños y los precios? ¿Por qué puede afirmarse lo anterior? ¿Qué quiere decir *escondida* en este contexto?

P5. Los trenes de juguete se venden en varios tamaños y anchos de vías. No todos los trenes de juguete están hechos a escala de los trenes reales.[1]

a) Los trenes de juguete de ancho de vía HO se construyen a una escala de 1 a 87. ¿Cuál es el factor de escala de un tren de juguete de ancho de vía con norma HO?

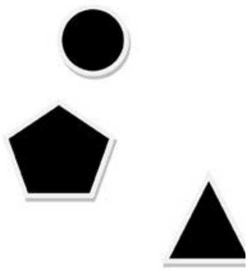
b) ¿Cuál es la relación entre el volumen de un vagón de carga real y el de un modelo a escala en el ancho HO?

P6. Dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. ¿Cuándo las siguientes figuras de la lista que sigue son semejantes? La respuesta puede ser *siempre*, *a veces*, *nunca*. En los casos en los que la respuesta es *a veces*, mostrar con un ejemplo lo dicho:

a) Dos triángulos isósceles.

b) Dos triángulos equiláteros.

c) Dos cuadrados.



1. Después de la Primera Guerra Mundial hubo varios intentos de introducir un modelo de ferrocarril cerca de la mitad del tamaño de 0 escala que sería más adecuado para diseños de casas más pequeñas y más barato de fabricar. HO fue creado para cumplir con estos objetivos. Para esta nueva escala, un ancho de vía de 16.5 mm fue diseñado para representar ancho de vía estándar de prototipo, y se eligió un modelo a escala de 1:87.

d) Un cuadrado y un rectángulo.

e) Dos pentágonos regulares.

f) Un pentágono regular y un hexágono regular.

g) Dos ángulos.

h) Dos círculos.

P7. Determiná si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En el caso en que resulten verdaderas justificar la respuesta. En el caso en que resulten falsas, mostrar con un ejemplo esa valoración.

a) Si un polígono al que llamaremos A es semejante a otro al que llamamos B y resulta que B es semejante a otro al que llamamos C, podemos afirmar que A es semejante a C.

b) Los ángulos interiores correspondientes de polígonos semejantes son congruentes.

c) Un polígono es semejante a sí mismo.

P8. En un determinado país se realizará una moneda para circulación legal que representará 1 peso. Geométricamente, la que lleva como denominación 0,25 de ese peso es un cilindro de 15/16 pulgadas de diámetro y 1/16 pulgadas de espesor. Si guardamos las relaciones, la que se está fabricando deberá tener 4 veces este volumen.

a) Uno de los asesores de la construcción sugiere que los requerimientos estarán satisfechos si se duplican el diámetro y el espesor de la moneda conocida. ¿Qué se le debería decir a ese asesor? ¿Por qué? (Recuerda que el volumen del cilindro se obtiene multiplicando el área de la base por la altura, $V = \pi . r^2 . h$, donde π vale aproximadamente 3.14; r es el radio y h la altura)

b) Si se aceptara esa sugerencia de duplicar el diámetro: ¿qué espesor debería tener la nueva moneda?

c) ¿Cuáles serían las dimensiones de la nueva moneda si su tamaño fuese proporcional al de la de 0,25?

P9. Los siguientes son avisos publicitarios que han aparecido en diferentes medios. Elaborá, para cada uno de ellos, una crítica, usando como argumentos los contenidos desarrollados en el capítulo.

a) Esta turba de la Mesopotamia enriquece el suelo y favorece el crecimiento de sus plantas. Viene comprimida a 2 ½ veces de su volumen original.

b) Las tasas de interés de los préstamos hipotecarios han bajado de un 20% a un 10%. Han tenido una reducción del 100%.

c) Este nuevo enjuague bucal reduce la placa bacteriana en un 300%.

P10. En el cuento infantil *Peter Pan*, Peter y Wendy pueden volar. La altura de esos personajes parece ser aproximadamente 12 veces la longitud de un gorrión.

a) ¿Cuál debería ser la velocidad mínima de vuelo?

b) Listá todos los datos necesarios para hallar la respuesta a la pregunta del ítem anterior.

c) Explicá la secuencia de acciones que permitieron hallar la respuesta del ítem a) a partir de los datos de la situación.

P11. Elaborá los argumentos que permitan explicar lo que se relata en los siguientes textos. Utilizá los contenidos matemáticos aprendidos a lo largo de este capítulo y otros que estimes pertinentes.

a) Recordá, aproximadamente, tu peso y altura al nacer. Considerando los actuales, escribí un artículo periodístico que dé cuenta de por qué el crecimiento humano no es proporcional.

b) Si tu crecimiento hubiese sido proporcional, el área de tu cuerpo hubiese aumentado como tu volumen, elevado a la potencia de 2/3. Desarrollá un ensayo para justificar que lo que decimos es verdadero

c) Una hormiga común –de las que tienen 1 cm de longitud– necesita alrededor de 24 ml de oxígeno por segundo por cada cm^3 de volumen para poder vivir. Puesto que una hormiga no tiene pulmones, debe absorber oxígeno por su piel a una velocidad de 6,2 ml por segundo por cada cm^2 de piel. Escribí las partes del proyecto que permiten, matemáticamente, construir una hormiga gigante de 8 m de largo y 3 m de ancho. No olvides especificar todos los datos que requiere el trabajo.

P12. Armá con los siguientes conceptos una red que dé cuenta del concepto de semejanza:

Congruencia - factor de proporcionalidad - ángulos correspondientes - forma - tamaño.

CAPÍTULO 3

Funciones y modelos:

sobre la potencia de las variaciones

Fernando Bifano – Leonardo Lupinacci

3.1. Introducción

Muchas veces, para analizar diversos fenómenos del mundo que nos rodea, se recurre a la construcción de modelos. Estos son representaciones (gráficas, esquemáticas o analíticas) de una realidad que toman de ella lo que se considera esencial, desechando otras características que pueden ser prescindibles; así logramos centrarnos en los elementos más relevantes para explicar el fenómeno analizado. Estos modelos estudian cuestiones tan variadas como problemas de física, economía, geografía, medicina, psicología, biología y representan estos fenómenos mediante mapas, planos, esquemas de circuitos, maquetas y réplicas de vehículos y edificios, símbolos.

Dentro de los modelos, encontramos **los matemáticos**, que podemos definir como una representación simplificada de la realidad a partir del uso de elementos matemáticos que establecen la relación entre los componentes del fenómeno analizado. Así, en un fenómeno, existen valores variables que se relacionan entre sí, ya que al modificarse uno de ellos, puede incidir directa o indirectamente en variaciones de otros valores. Por ejemplo, la temperatura depende del lugar del planeta donde sea registrada (latitud y longitud), de la altura con respecto al nivel del mar, de la humedad, de la presión atmosférica, de la época del año, de la nubosidad y de la hora del día. Dependiendo del tipo de modelo que se quiera construir y de la necesidad de precisión, se considerarán qué características son definitorias para su elaboración. Una vez analizadas estas cuestiones, el modelo puede ser representado mediante tablas, gráficos o ecuaciones. De este modo, se puede profundizar el estudio, la búsqueda de resultados y hallar las soluciones al o los problemas planteados.

En este sentido, acordamos conautores como Chevallard, Bosch y Gascón (1997) cuando afirman

> Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, con una actividad de modelización matemática (p. 51).

En este capítulo proponemos adentrarnos en esta modelización matemática mediada por el concepto de función que acabamos de describir. Lo haremos a partir de la construcción y del análisis de modelos ya elaborados..

3.2. La complejidad del concepto de función: variaciones, ecuaciones, representaciones

¿Existirá alguna relación entre la modelización y la noción de función? Tratemos de elaborar juntos la respuesta a este interrogante. Así como el concepto de modelización permite abarcar gran parte de la actividad matemática, el concepto de función es quizás uno de los más potentes que ha recorrido un largo proceso que abarcó varios siglos hasta lograr su definición. No nos proponemos en este texto dar cuenta acabada de dicho proceso de desarrollo, sin embargo, hemos considerado oportuno marcar algunos elementos clave que permitan entender las distintas formas de poder concebir la función y así comprender el vínculo con la modelización que estamos presentando.

Retrotraigámonos en el tiempo para ir hacia la búsqueda de las culturas babilónica y griega (entre los siglos VIII y V a.C.), esas que desde el principio se ocuparon de comprender y explicar las regularidades de los fenómenos naturales. A partir de las observaciones de los astros, los primeros construían **tablas** para que luego, sobre la base de cálculos aritméticos pudieran anticipar y predecir la regularidad de dichos fenómenos; los segundos, más cercanos a la filosofía, buscaron explicar los fenómenos del cambio y el **movimiento** apoyándose en cierta intuición, en poder encontrar un modelo de relaciones numéricas que explique estas manifestaciones (Farfán y García, 2005).

Esta "obsesión" por cuantificar los fenómenos naturales no desaparecerá con el transcurrir del tiempo y, a pesar de que en la Edad Media las distintas ramas de la matemática como la trigonometría y el álgebra toman caminos propios y se alejan un poco, será en la posterior unificación de conceptos como número y magnitud la que permitirá centrar las bases para el desarrollo de la noción de función (Cotret, 1985).

Oresme, en el siglo XIV en Francia, fue el primero en utilizar gráficos para describir los movimientos e interpretar los cambios de las magnitudes con fuerte tinte en lo cualitativo. Galileo se presentó como el pionero en buscar, a partir de las experimentaciones, modelos del tipo causa-efecto que permitieran explicar sucesos en términos de dependencia. Con el advenimiento de la geometría analítica[1] en el siglo XVII, Fermat y Descartes explicaron, en términos de **ecuación,** la idea de función: "Una ecuación en x e y, es una forma de introducir una dependencia entre dos cantidades, de manera que el cálculo de valores de una de ellas corresponde a los valores de la otra" (Ruiz citado en Farfán y García, 2005:491) y con respecto a su representación gráfica: "Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva" (Descartes citado en Hanfling, 2000:4).

1. Sucintamente podemos decir que la geometría analítica se ocupa del estudio de la geometría en el marco de un sistema de referencia de ejes cartesianos. A partir de establecer una correspondencia entre cada punto del plano y un par de coordenadas, se le puede dar un tratamiento algebraico a las nociones habituales de recta, plano y todo tipo de curvas para establecer sus ecuaciones.

Esto sentará las bases para el desarrollo de una de las ramas fundamentales de la matemática para el estudio del movimiento: el análisis matemático. A lo largo del siglo XVII, Newton, Leibniz, y posteriormente en el siglo XVIII, Euler, matematizaron el estudio de los fenómenos físicos y fueron los primeros en utilizar el término "función" para caracterizar una expresión analítica y la correspondiente notación *f(x)*. Basta para ello con mirar la definición dada por este último para ver cuánto ya nos hemos alejado de las ideas intuitivas de movimiento y el énfasis que poco a poco recae en el potencial de la expresión: "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, como quiera que lo sea, de dicha cantidad y de números o cantidades constantes (…) y las cantidades sobre las que opera (…)" (Euler, 1748:2).

En tiempos de Cauchy, Lobachevsky, Riemann, Dirichlet, pleno siglo XIX, la formalización de la matemática gana terreno y se pierden cada vez más las huellas del movimiento y las curvas que le dieron origen al concepto. Los aportes matemáticos muestran toda su potencia aplicable a las diferentes ramas de la matemática, a punto tal que con el posterior desarrollo de la teoría de conjuntos durante el siglo XX se llegará a la máxima abstracción y formalización en su definición:

> Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función **f** definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la cual se hace corresponder a cada elemento de X un elemento de Y. Se dice también que X es una aplicación de X en Y (Hanfling, 2000:6).

Como puede verse en el desarrollo de los párrafos anteriores, la evolución de la noción de función ha seguido un camino tal que, progresivamente, las ideas de variación han ido desapareciendo para cobrar vigor las relacionadas con la aplicación. La preocupación por interpretar y responder a fenómenos naturales con modelos matemáticos que expliquen sus comportamientos, paulatinamente ha sido reemplazada por la necesidad de acuñar una definición lo suficientemente amplia, rigurosa y general, que permita aplicarse a diferentes situaciones, incluso más allá de la necesidad de existencia de fenómenos reales a los que pueda dar respuesta o representar. De lo anterior podemos recuperar dos aportes importantes:

- Un concepto matemático no se da espontáneamente. Sigue necesariamente un camino de idas y vueltas que hacen a su maduración como noción. La forma en que se cristaliza y formaliza puede ocultar las ideas mismas que le dieron origen.

- Una definición matemática pone de relieve uno u otro aspecto del concepto, pero puede ocultar otros. Definir no es otra cosa que poner límites. Al definir un concepto, uno recorta de determinada manera. Es importante considerar las ventajas de una u otra definición, para considerar la más pertinente para modelizar un problema.

Usando estos aportes adoptaremos de aquí en más la siguiente definición de función:

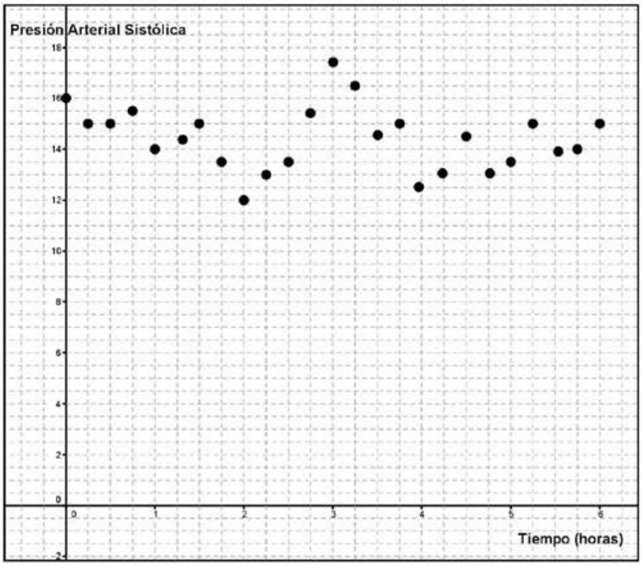
Una función es un modelo matemático que permite interpretar una situación a partir de una ley que explica el comportamiento de una variable en términos de otra, tal que a cada valor de una de ellas considerada independiente, le asigna un solo valor de la otra, que será la dependiente. Su expresión analítica, su gráfico cartesiano o cualquier expresión –simbólica o no– son diferentes formas que permiten representarla.

Como se desprende de la definición anterior, los diferentes aspectos que hacen a una función: su aspecto modelizador, la ley que regula el comportamiento entre las variables, su expresión gráfica o simbólica serán componentes que iremos profundizando a medida que desarrollemos el capítulo.

3.3. Las funciones y la potencia del lenguaje gráfico

A continuación les propondremos una serie de problemas que permitirán desarrollar los diferentes aspectos que se relacionan con la modelización matemática y las ventajas de considerar las representaciones gráficas de las funciones.

P1. Como parte de un control para analizar la eficacia de un tratamiento, a un paciente hospitalario que sufre de hipertensión se le realizan mediciones de presión arterial cada 15 minutos. Las mediciones obtenidas de la presión sistólica (o alta) se indican en el siguiente gráfico.



Respondé:

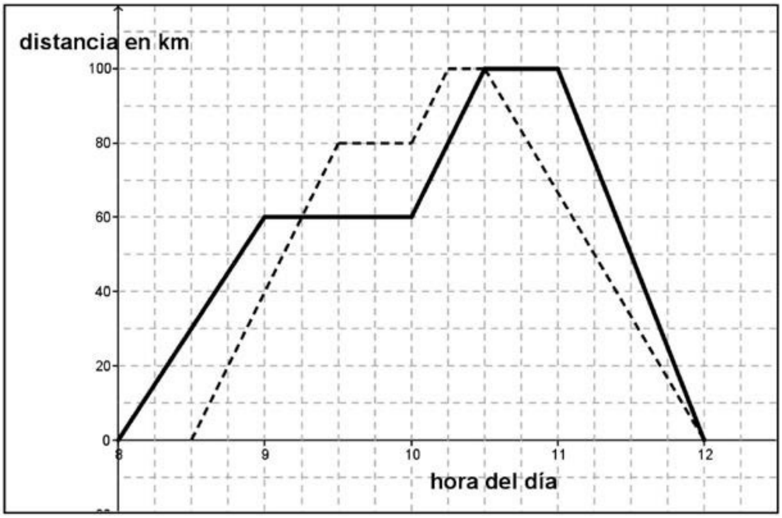
a) ¿Entre qué valores osciló su presión en el período en que fue controlada?

b) ¿Cuál fue el máximo valor registrado? ¿Y el mínimo? ¿Cómo se identifica eso en el gráfico?

c) ¿Puede asegurarse que durante las 6 horas de control, los valores indicados en el ítem anterior, son los mayores y menores valores que haya alcanzado el paciente? ¿Por qué?

d) ¿De qué otra manera podría representarse la información brindada por el gráfico? ¿En cuál de esas formas (el gráfico y la propuesta por vos) considerás que la información se visualiza mejor? ¿Por qué?

P2. El siguiente gráfico muestra la relación entre la hora del día y la distancia a la que cada uno de los dos vehículos se encuentra de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Estos vehículos, una camioneta (línea continua) y un auto (línea punteada), viajan desde la Ciudad Autónoma de Buenos Aires a la ciudad de Lima en la provincia de Buenos Aires, para volver posteriormente a su punto de partida.



Respondé:

a) ¿A qué hora salió el auto de la ciudad de Buenos Aires?

b) ¿Cuánto tiempo estuvo detenida la camioneta antes de llegar a la ciudad de Lima? ¿Cómo se evidencia esto en el gráfico?

c) ¿Cuál de los dos vehículos estuvo un lapso de tiempo mayor en la ciudad de Lima?

d) ¿Cuánto tiempo, luego de su partida, tardó el auto en sobrepasar a la camioneta?

e) ¿En qué tramo el coche se desplazó a mayor velocidad?

¿Qué diferencia existe entre estos gráficos y el del problema anterior? ¿Cómo se explica eso matemáticamente?

¿Qué conclusiones podemos sacar de estos dos primeros problemas? En primer lugar, el análisis de un gráfico nos permite darnos una idea global del comportamiento de las variables involucradas en la situación representada.

Las variables involucradas en un modelo pueden ser seleccionadas con una intención particular: en el primer problema se estudia la variación de la presión a lo largo del tiempo, pero no necesariamente porque una dependa de la otra. Esa elección es intencional porque permite obtener conclusiones sobre la salud del paciente, y no porque la presión dependa del tiempo. La elección de la variable independiente y dependiente no está condicionada de antemano para cada magnitud en particular, sino que la determinación de cada una de ellas responde en muchas ocasiones al modelo que se quiera construir. Muchos modelos utilizan al tiempo como variable independiente, porque al no poder manipularlo se "impone" de tal manera en términos matemáticos, lo que permite estudiar las variaciones de otra variable a medida que va cambiando.

Algunas convenciones:

Habitualmente la forma de representar los gráficos como los propuestos en estos problemas es en un par de ejes denominados cartesianos. Como parte de esta forma el eje horizontal se denomina "eje de abscisas" donde se representa la variable independiente y el eje vertical denominado "eje de ordenadas", donde se representa la variable dependiente.

El conjunto[2] de todos los valores que toma la variable

2. En la introducción histórica se mencionó la fuerte influencia de la teoría de conjuntos en la formalización de la noción de función durante el siglo XX. Esta influencia se evidencia en muchas nociones relacionadas con la idea de función, tanto en su nombre como en su definición.

independiente recibe el nombre de “dominio de la función”, mientras que el conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente recibe el nombre de conjunto “imagen de la función”.

Otro elemento que podemos destacar del análisis de estos dos problemas es la diferencia en cuanto a las características del dominio: los conjuntos numéricos de referencia de cada uno son distintos. Si bien el tiempo es un continuo, en un caso están considerados intervalos de 15 minutos (0,25 horas) entre 0 y 6; en el otro todo el continuo de 12h. Esto tiene implicancias para interpretar el gráfico obtenido, pues de hecho como la presión se ha registrado cada 15 minutos no es posible asegurar cómo se comportó esta entre cada toma. En el primer caso la referencia está dada por algunos números racionales entre 0 y 6, en el segundo, los números reales entre 8 y 12. El primer tipo de representación se denomina “discreta”, mientras que el segundo caso se llama “continua”.

P3. Considerando la definición de función enunciada, no todo gráfico cartesiano representa una función entre variables.

a) Justificá la afirmación anterior. Da ejemplos de gráficos cartesianos donde las variables no se relacionen mediante una función.

b) Buscá ejemplos de la vida cotidiana donde existan variables que se relacionen, de tal manera que:

b.1. determinen una función;

b.2.no determinen una función.

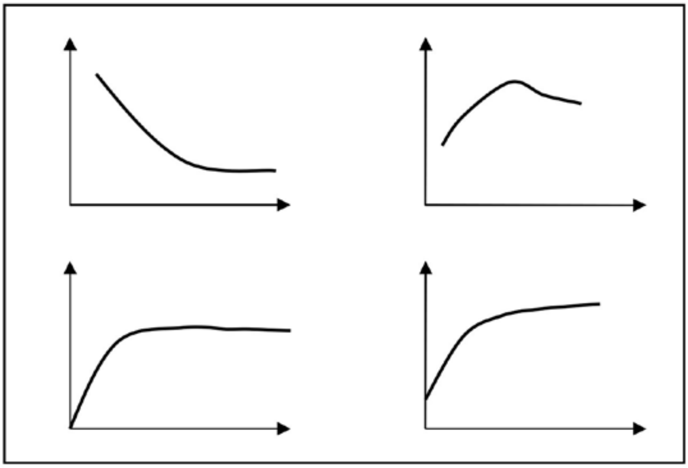
3.4. De lo cualitativo a lo cuantitativo

P4. Indicá cuál de los gráficos que se muestran se ajusta mejor a cada una de las siguientes afirmaciones.

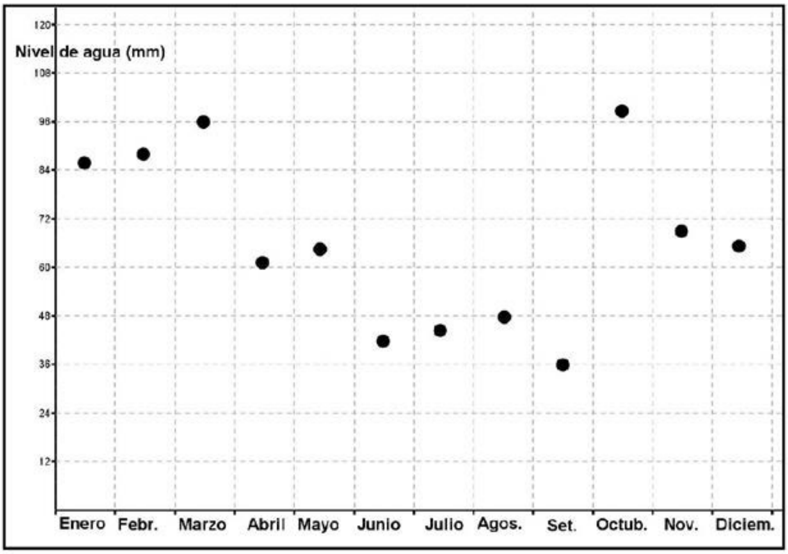
a) Las ventas de la industria automotriz continúan creciendo, aunque en los últimos meses el incremento ha sido menor.

b) El índice de natalidad de la región correspondiente al centro de Europa estaba disminuyendo, pero en los últimos años se ha mantenido constante.

c) El precio del barril de petróleo crudo alcanzó su máximo hace dos meses. A partir de ese punto ha comenzado a disminuir.



P5. Las precipitaciones se miden en mm de agua caída. El gráfico registra el nivel de agua caída a lo largo de un año en la ciudad de Buenos Aires.



Respondé:

a) ¿En qué mes se registró la máxima cantidad de lluvia caída a lo largo del primer semestre del año? ¿Y del segundo? ¿Y a lo largo del año?

b) ¿Cuál fue el mes menos lluvioso del año? ¿Cuánto fue la mínima cantidad que llovió?

c) ¿Es cierto que el nivel de lluvias crece entre julio y octubre? ¿Por qué?

d) ¿Cómo describirías el comportamiento de la lluvia caída a lo largo de todo el año?

P6. La siguiente tabla indica las temperaturas registradas en distintos momentos de un día de agosto en Florencio Varela.

Hora del día	1:00	3:30	6:00	12:00	13:00	19:00	21:00
Temperatura	3°C	3°C	-1°C	7°C	9°C	6°C	4°C

A partir de estos valores, respondé:

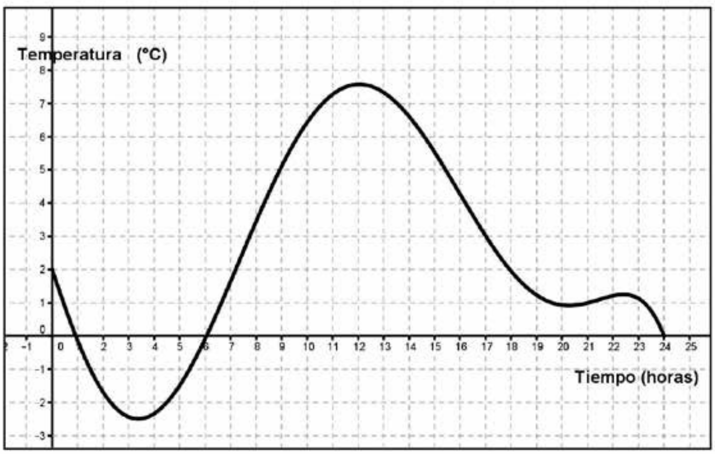
a) ¿Cuál fue la mayor temperatura registrada ese día? ¿Y la menor? ¿Puede asegurarse que ellas sean la mayor y menor temperatura que hizo en el día? ¿Por qué?

b) ¿Existió algún momento del día en que la temperatura haya sido 0°C? ¿Por qué?

c) Representá las temperaturas registradas mediante un gráfico cartesiano. Explicá que cuestiones tomaste en cuenta para realizarlo.

d) ¿Cómo podés clasificar las variables con que estamos trabajando en esta situación? ¿Por qué?

P7. El siguiente gráfico muestra las temperaturas registradas a lo largo de las 24 horas de otro día de agosto en Florencio Varela.



Respondé:

a) ¿Cuáles fueron la mayor y la menor temperatura registrada durante ese día? ¿A qué hora se registró cada una de ellas?

b) ¿Entre qué horarios la temperatura subió? ¿Entre qué horarios disminuyó?

c) ¿En algún momento la temperatura fue de 0°C? ¿Cómo se evidencia eso en el gráfico?

d) ¿Qué diferencias observás entre este gráfico y el que construiste en el problema anterior?

Analicemos con detenimiento los problemas 4 y 5. El problema 4 nos brinda información, a grandes rasgos, de las situaciones que representa. Es decir, no tiene información cuantitativa; describe en forma **cualitativa** el comportamiento de los modelos a los que hacen referencia: por ejemplo, el aumento del precio del barril de petróleo y su posterior disminución a lo largo del año, sin llegar a poder saber valores siquiera estimados de esa situación.

En el problema 5 hay informaciones en los ejes y a partir de un análisis de estos se puede obtener en forma **cuantitativa** datos concretos del comportamiento de la función estudiada. Por ejemplo, se pueden determinar cuáles fueron los meses con mayores mm de agua caídos y cuáles con menos; incluso describir todo el comportamiento de las lluvias a lo largo del año.

Consideremos el problema 7. Además de la diferencia entre las variables discretas y continuas, en este caso hay valores que por el contexto del problema son negativos –temperaturas a lo largo de un día– o incluso se corresponden con cero. En este último caso, a esos valores se los denomina "ceros o raíces de la función".

Hay otros puntos que permiten interpretar el comportamiento de la función: aquellos que evidencian ciertos cambios. Por ejemplo, hasta las 12 la temperatura estaba subiendo, luego de las 12 comenzó a descender; hasta las 20 la temperatura descendía y luego de las 20 subió. Convencionalmente en matemática, en el punto del gráfico donde se visualiza el cambio en el comportamiento del crecimiento de la función recibe el nombre de "máximos y mínimos".[2]Y puede darse el caso, como el mismo ejemplo del problema 7 lo propone, de que haya más de un máximo o de un mínimo. En estas situaciones se distinguen en términos "absolutos y relativos": los primeros, para el mayor de los máximos o el menor de los mínimos; los segundos, para los restantes.

Tomando los máximos y los mínimos como referentes, se puede describir[3] la forma en que se comporta la función según cambia la variable independiente: en este caso, la temperatura desciende entre las 0 y las 3:30, luego asciende hasta las 12; desde allí desciende hasta las 20, volviendo a subir hasta las 22:30, para, desde esa hora, volver a descender hasta el final del día.

Así como los máximos y mínimos se utilizan como referencia para explicar el comportamiento de la función en términos de **crecimiento y decrecimiento**, los ceros se utilizan como referentes para establecer los **conjuntos de positividad y negatividad** de una función: las temperaturas por debajo de cero,se dieronentre la 1 y las 6 de la mañana; de 0 a 1 y entre las 6 de la mañana a lo largo del día las temperaturas estuvieron por encima de 0.

2. Por convención también para los puntos se utiliza la notación de par ordenado. En este caso, un máximo se indicaría (12; 7,5). Donde la primera coordenada corresponde a la variable independiente, la hora del día; y la segunda, al valor numérico de la variable dependiente, en este ejemplo, la temperatura.

3. En algunos casos, y también por influencia de la teoría conjuntistas, si la situación lo amerita se describen estos comportamientos de crecimiento y decrecimiento en términos de intervalos unidos: por ejemplo, crecimiento (3,5;12) U (20; 22,5). Tenga en cuenta el lector que en este caso las cifras se expresan en forma decimal.

P8. De las fórmulas a los gráficos. Las variables en un circuito eléctrico.

La relación entre la resistencia de un conductor al paso de la corriente eléctrica (R), la diferencia de potencial o tensión (E) y la intensidad de corriente (I) que circula por un circuito eléctrico, puede representarse mediante lo que se conoce como la ley de Ohm. Esta ley establece, dentro de cierta aproximación que se cumple en la mayoría de los conductores, que la intensidad de corriente es proporcional a la diferencia de potencial aplicada; su expresión matemática es: $I = \frac{E}{R}$. La potencia eléctrica (P) es la energía transformada en una unidad de tiempo, se puede calcular mediante la expresión $P=EI$. Relacionando estas dos expresiones, es posible calcular la potencia eléctrica del circuito mediante la fórmula: $P = R.I^2$.

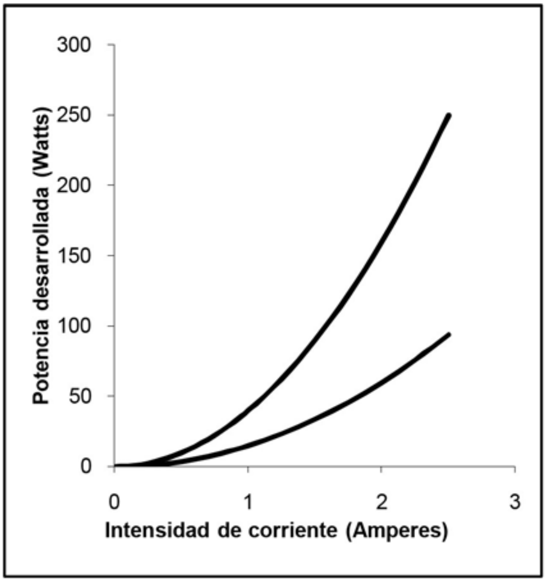
Analicemos qué ocurre cuando un circuito eléctrico determinado, con una resistencia fija de 10 Ω, se pone en funcionamiento.

a) ¿Cuál será la potencia desarrollada por ese circuito si la intensidad de corriente es de 0,1 amperio?, ¿y si es de 1,2?, ¿y para 3?, ¿y con 0,5 o 3,5?

b) Se sabe que la intensidad de corriente máxima que soporta el circuito sin dañarse es de 4 amperios, ¿cuál será la potencia máxima que puede desarrollar el circuito?

c) ¿Cómo podrían representarse los valores obtenidos en los ítems anteriores mediante un gráfico cartesiano? En este caso, ¿la representación será continua o discreta? ¿Por qué?

d) Otros dos circuitos que poseen distinta resistencia eléctrica se ponen en funcionamiento. A partir de ciertas mediciones se elaboran los siguientes gráficos que indican la potencia en función de la corriente que circula por ellos, ¿se puede conocer cuál circuito presenta una mayor resistencia?, ¿por qué?



3.5. Funciones y la potencia de la expresión analítica

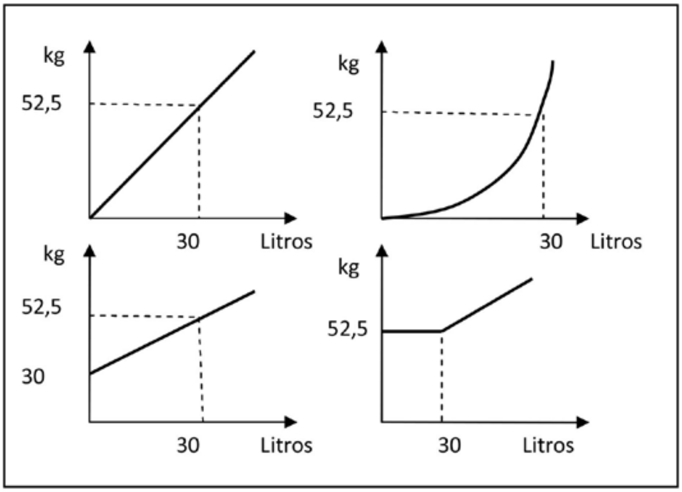
P9. Un tanque utilizado para almacenar aceite tiene una capacidad total de 250 litros. Su peso vacío es de 30 kilogramos, mientras que cada litro de aceite pesa 0,75 kilogramos.

Resolvé:

a) ¿Cuánto pesaría el barril si tuviera 30 litros de aceite? ¿Y si tuviera 48 litros? ¿Y 100? ¿Y si estuviera lleno?

b) Escribí una expresión que permita calcular el peso del barril más su contenido en función de los litros de aceite que posee.

c) ¿Cuál de los siguientes gráficos podría representar adecuadamente la situación? ¿Por qué?



Una vez seleccionado el gráfico que te parece el adecuado, contestá:

a) ¿Cómo aumenta el peso del barril a medida que se va llenando? ¿Cómo se evidencia ese cambio de peso en el gráfico seleccionado? ¿Qué relación existe entre la expresión que modeliza la situación y el cambio de peso del barril?

b) ¿Qué representa para la situación el punto del gráfico en donde la función intersecta al eje de ordenadas?, ¿existe alguna relación entre ese punto y la expresión propuesta? Fundamentá tus respuestas.

P10. Un tanque de agua que posee el día de hoy un contenido de 306 litros tiene una fisura que le origina una pérdida constante de 32 litros de agua por día. Si la fisura no se repara:

a) ¿Cuántos días deben pasar para que el tanque posea solo 180 litros de agua?

b) ¿Cuántos días tardará en vaciarse? ¿Qué representa ese valor matemáticamente?

c) Escribí una fórmula que permita calcular la cantidad de litros que posee el tanque en función de los días transcurridos.

d) Representá la situación en un sistema de ejes cartesianos. ¿Qué diferencias existen entre este gráfico y los anteriores?

> Las funciones de expresión **f(x) = ax + b** reciben el nombre de "funciones lineales" y su gráfico es una línea recta. Los valores *a* y *b* son números reales que reciben el nombre de "coeficientes" de la función lineal. El coeficiente *a* recibe el nombre de "pendiente", el *b* recibe el nombre particular de "ordenada al origen".
>
> La **pendiente** de una función lineal indica la variación de la variable dependiente (representada en el eje de ordenadas) por cada unidad que aumenta la variable independiente (representada en el eje de abscisas).
>
> La **ordenada al origen** representa el valor que adquiere la función cuando la variable independiente vale cero, por lo que gráficamente puede interpretarse como la intersección de la recta con el eje de ordenadas.

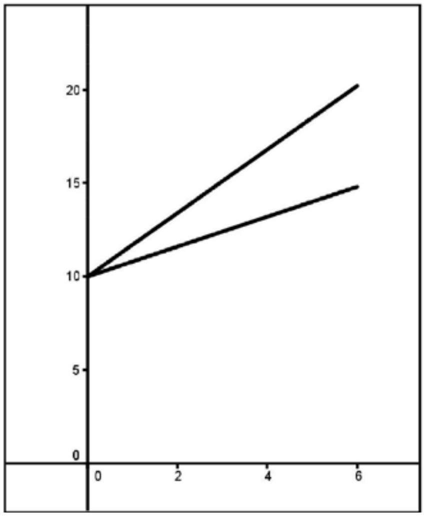
P11. Analizá las fórmulas y los gráficos producidos en los problemas anteriores y luego respondé:

a) ¿Qué característica poseen los gráficos cuando el coeficiente *a* de una función f(x) = ax + b es positivo? ¿Y cuando el coeficiente *a* es negativo?

b) ¿Cómo sería la representación gráfica de una función lineal donde el coeficiente **a** sea igual a cero?

c) Escribí algunos ejemplos de funciones lineales con la característica mencionada en el ítem b. ¿Qué situaciones reales podrían representar ese tipo de funciones?

P12. Una empresa consultora de inversión en la bolsa de valores informa a sus clientes acerca de las variaciones estimadas de los precios de las acciones A y B en los próximos 6 meses, siendo que el valor actual de ambas es el mismo. Dichas estimaciones responden a A(t) = 0,8t + 10 y B(t)= 1,7t + 10, siendo A(t) y B(t) el valor estimado de las acciones en pesos y *t*, el tiempo en meses. Junto a las fórmulas de estimación se adjunta el siguiente gráfico:¿-Qué recta corresponde a la variación del valor de cada una de las acciones? ¿Por qué? ¿En cuál de las dos acciones convendría invertir? ¿Por qué?

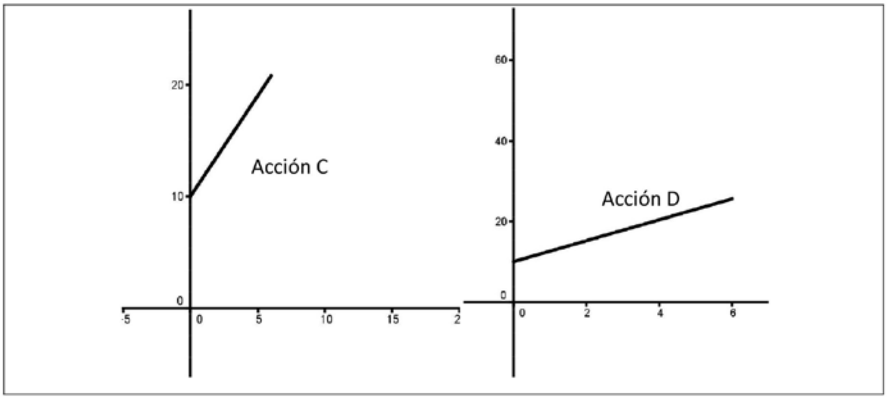


a) ¿Qué recta corresponde a la variación del valor de cada una de las acciones? ¿Por qué? ¿En cuál de las dos acciones convendría invertir? ¿Por qué?

b) ¿Qué valor alcanzará cada una de las acciones al cabo de los seis meses de cumplirse la estimación?

c) ¿Qué relación existe entre las pendientes de ambas fórmulas y los gráficos que representan a cada función?

d) La misma empresa informa luego a sus clientes sobre la evolución del precio de otras dos acciones C y D. En este caso solo entrega los siguientes gráficos, pero no las fórmulas correspondientes. ¿Es correcto decir, entonces, que entre las dos, conviene invertir en las acciones C? ¿Por qué?



P13. Cotidianamente utilizamos, para medir temperatura, la escala denominada Celsius (C). Esta escala fue definida en 1742 a partir de los puntos de congelación y ebullición del agua (establecidos respectivamente como el 0° y 100° de la escala). El grado Celsius fue adoptado como unidad accesoria de temperatura por el Sistema Internacional de Unidades, aunque no es la única escala de temperatura, ya que existen, entre otras, la escala Kelvin (unidad básica de temperatura del Sistema Internacional) y la escala Fahrenheit. Esta última se ha utilizado a través del tiempo principalmente en países de habla inglesa. Algunos de esos países la han ido dejando de usar y han adoptado la escala Celsius, mientras que, otros como los Estados Unidos, la siguen utilizando cotidianamente. Existe una relación entre los valores de estas dos escalas. Puede calcularse la equivalencia entre grados Celsius (C) y grados Fahrenheit (F) a partir de la expresión: $F = 1{,}8\,C + 32$.

a) ¿A cuántos °F equivalen 20°C? ¿Y 15ºC?

b) La temperatura normal de una persona es de 37°C, ¿a cuántos °F equivale ese valor?

c) Si en un informe meteorológico del extranjero se indica que la temperatura máxima del día será de 40°F, ¿se trata de un día caluroso?, ¿por qué?

d) **¿**Para qué temperatura marcará el mismo valor un termómetro calibrado en la escala Celsius que otro calibrado en la escala Fahrenheit?

P14. Modelos al vuelo.

Los aviones comerciales utilizan, para desplazarse, combustible realizado a base de kerosén, el cual se elabora en distintas variantes como el Jet A y el Jet A-1. A la hora de realizar la carga de combustible en los aviones, se tienen en cuenta diversos factores: el tiempo de vuelo, el despegue y el aterrizaje, la posibilidad de que por alguna circunstancia deba desplazarse a otro aeropuerto, etc. No se trata únicamente de "llenar el tanque", ya que una cantidad en exceso de combustible provoca que el vehículo sea más pesado, lo que genera un incremento en el consumo. Por eso se calcula específicamente la cantidad de combustible por cargar; este se mide en libras a la hora de realizar la planificación de carga.

El clásico avión Boeing 747-300, puede cargar como máximo 52.410 galones, lo que equivale aproximadamente a 358.500 libras[5] (alrededor de 162 toneladas). El consumo de combustible por parte de este avión no es constante. Se estipula que utiliza unas 2200 libras de combustible en el rodaje hasta la pista, unas 33.000 libras entre el despegue y el alcance de la velocidad crucero, unas 28.000 libras de combustible por hora durante la primera mitad del vuelo, y un promedio de 21.000 libras por hora en la segunda mitad (porque el avión ya está más liviano al haber consumido parte de su combustible, lo que aumenta su rendimiento). Se estipula un consumo de 6000 libras para el aterrizaje y unas 1000 para el rodaje final por la pista. Más allá de tener en cuenta estos valores para el cálculo de la carga de combustible, se suele cargar entre 25.000 y 40.000 libras extras de reserva para el caso de que la aeronave tenga que cambiar de aeropuerto por causas fortuitas.

A partir de la información anterior, encontremos un modelo de una supuesta situación. Proponemos un vuelo de un tiempo de 8 horas exactas

5. Los galones y las libras son unidades de medidas pertenecientes al sistema inglés, utilizadas para la capacidad y el peso respectivamente. Si bien en nuestro país se adoptan y utilizan cotidianamente las unidades del Sistema Internacional, en algunas aplicaciones tanto en nuestro país como en el resto del mundo se utiliza el sistema inglés. Tal es el caso de la aviación y también, por ejemplo, en algunas actividades relativas a la construcción donde las longitudes se indican en pulgadas.

desde que el avión despega hasta que aterriza, considerando que tanto los procesos de despegue y ascenso como de descenso y aterrizaje, insumen exactamente media hora cada uno. Si suponemos que el Boeing posee, en el momento exacto del despegue, una carga de combustible de 250.000 libras:

a) ¿Qué cantidad de combustible posee el avión a las 2 horas de haber despegado?

b) ¿Y a las 6 horas de haber despegado?

c) ¿Con cuántas libras de combustible llega el avión a destino?

d) ¿Existe una única expresión que pueda modelizar la cantidad de combustible en función de las horas de vuelo para cualquier momento del trayecto? ¿Por qué?

Realizá un gráfico cartesiano que relacione la cantidad de combustible que posee el avión en función del tiempo de vuelo.

3.6. Buscando el equilibrio

P15. En economía se define al "beneficio" o "ganancia" como la diferencia entre el **ingreso** y los **costos totales**. El **ingreso** se determina a partir del dinero recaudado, por la venta de los productos (q) elaborados. Los **costos totales** se obtienen sumando los **costos fijos** (que una empresa siempre tiene más allá de su producción, representados por los sueldos, cargas sociales, infraestructura, etc.) y los **costos variables** (que dependen de los artículos producidos). Cuando la cantidad de los productos vendidos es tal que los ingresos y los costos son iguales, el beneficio de la empresa es nulo: se da un **estado de equilibrio o punto de equilibrio**.

Suponé que una empresa que elabora lapiceras tiene unos costos fijos diarios de $1200. Cada lapicera que fabrica tiene un costo unitario de $0,80y su valor de venta es de $2.

a) Simbolizá las funciones que permiten obtener el costo total (C) diario de producir q lapiceras y el ingreso (I) diario de vender q lapiceras.

b) Graficá ambas funciones en un mismo sistema de ejes cartesianos.

c) ¿Qué cantidad de lapiceras se deben producir y vender para que el beneficio sea igual a cero? ¿Cuánto valdrían los costos y los ingresos en ese caso?

d) A partir de lo realizado en el ítem anterior y analizando las expresiones que simbolizan el costo total y el ingreso:

- ¿Cuántas soluciones posee la ecuación que simboliza a los costos totales? ¿Qué características poseen esas soluciones? Escribí algunas de ellas.

- ¿Cuántas soluciones posee la ecuación que simboliza al ingreso? ¿Qué características poseen?

- ¿Existe algún par ordenado de números que sea solución simultáneamente de la función costo y de la función ingreso? ¿Cuántos pares ordenados cumplen esa condición? ¿Cómo se interpreta gráficamente eso?

En el ítem **c** del problema anterior, calculaste el punto de equilibrio entre costos e ingresos. Al buscar el equilibrio en el problema, se está buscando una solución en común para ambas ecuaciones: a un par ordenado de números que sea solución simultáneamente de la función costo y de la función ingreso.

Al considerar que los costos e ingresos son iguales, es posible buscar esta solución en común planteando dicha igualdad: $c(q) = i(q)$. A partir de ella, en este caso, nos quedará establecida una única ecuación con una sola incógnita (la cantidad a fabricar en este caso), que se puede resolver por los métodos tradicionales.

Cuando buscamos la solución en común entre dos o más ecuaciones de dos o más variables, se dice que estamos resolviendo un “sistema de ecuaciones”. El procedimiento utilizado en este caso de igualar las expresiones, es llamado comúnmente “igualación”.

Existen otros métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, como la sustitución o el método de determinantes, entre otros. La conveniencia de utilizar un método u otro responde a las características de la situación a resolver y a las variables puestas en juego.

P16. Una compañía de Internet ofrece un servicio para ver películas *on line*. Este servicio es promocionado en tres modalidades:

i- La modalidad “estándar” no tiene cuota mensual. Por cada película que se ve,se deben abonar $10.

ii- La modalidad “oro”tiene una cuota mensual de $20. Además hay que abonar $5 por cada película que se ve.

iii- La modalidad “platino” se compone únicamente de un abono mensual de $80, pudiendo, por ese precio,verilimitadamente películas durante un mes sin pagar ningún otro importe.

Sobre la base de la información anterior, resolvé:

a) Si se planean ver 6 películas en el mes, ¿qué servicio conviene contratar? ¿Y si solo se esperan ver 3?

b) ¿Cuántas películas deben verse al mes, al menos, para que convenga contratar la opción platino?

c) Realizá, en un mismo sistema de ejes cartesianos, el gráfico que modelice las tres opciones de pago. ¿Qué representan para la situación las intersecciones entre las gráficas? Calculá dichas intersecciones simbólicamente.

d) Otra compañía distinta (B) ofrece un único método de pago: al abonar $20 se tiene acceso a ver dos películas sin tener que pagar ningún abono fijo mensual. ¿Qué es más conveniente: utilizar el servicio estándar de la compañía A o el servicio de la compañía B? ¿Por qué? ¿Cómo se evidencia gráficamente la respuesta?

P17. Los costos fijos de una empresa que elabora dulces artesanales son de $500 por día. Por cada frasco de dulce que elabora tiene un costo de $6,75 en materia prima, $2,25 por cada frasco de vidrio y $0,50 entre tapa y etiqueta. Por cada dulce vendido obtiene un ingreso de $9,50. Suponiendo que todos los dulces elaborados son vendidos:

a) Simbolizá las funciones que representan el costo total y el ingreso en función de la cantidad de frascos de dulce elaborados/vendidos.

b) ¿Qué cantidad de dulces debe vender para que los costos y los ingresos sean iguales? ¿Por qué? ¿Cómo puede interpretarse gráficamente esta respuesta

> En los problemas anteriores se han resuelto sistemas de ecuaciones para la búsqueda de puntos en común entre dos funciones. En algunos casos la solución ha sido única mientras que en otros infinitas o inexistentes.
>
> Cuando un sistema de ecuaciones admite una cantidad finita de soluciones se lo denomina sistema "compatible determinado": "compatible" por tener solución y "determinado" por poder establecer cuáles son dichas soluciones. Cuando un sistema posee infinitas soluciones se lo denomina "compatible indeterminado"; mientras que a los sistemas que no poseen solución, se los llama "incompatibles".

- Clasificá los distintos sistemas que has resuelto en los problemas anteriores en función de las soluciones encontradas.

Como en este caso se está trabajando con ecuaciones de dos variables, es posible interpretar geométricamente los distintos tipos de sistemas en función de la posición relativa de dos rectas en el plano.

- A partir del análisis de las resoluciones anteriores, ¿qué representación gráfica se asocia a cada tipo de sistema? ¿Por qué?

Algunas conclusiones:

A lo largo del capitulo hemos reflexionado sobre dos conceptos potentes en matemática : **modelización** y **función.**

Ambas nociones están fuertemente vinculadas y permiten estudiar el comporamiento de situaciones de diversa índole.

Hemos también mostrado y profundizado las relaciones entre las funciones y sus diversas formas de representación (gráficos, tablas, expresiones simbólicas, etc.).

En el capítulo que sigueahondaremos en el estudio de los fenómenos ligados a otros modelos más allá de los lineales, estableciendo limitaciones y comparaciones entre estos para compreder el potencial que guarda cada uno de ellos.

CAPÍTULO 4

Funciones

Otras modelizaciones sobre la potencia de las variaciones

Fernando Bifano – Leonardo Lupinacci

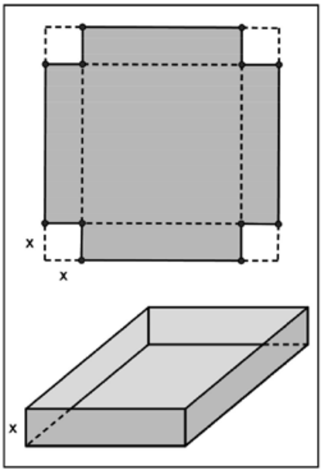
4.1. Introducción

En el capítulo anterior estudiamos la relación entre las funciones y los modelos matemáticos. A continuación profundizaremos sobre las particularidades de ciertos modelos: polinómicos, exponenciales y logarítmicos, mostrando su potencial (para explicar el comportamiento de los fenómenos que modeliza) y también sus límites.

4.2. Modelos polinómicos

Posiblemente alguna vez hayan calculado áreas o volúmenes de cuerpos aplicando fórmulas. Pero esas fórmulas ¿son siempre las mismas? ¿Basta con conocer las dimensiones de un cuerpo para reemplazar los valores en una fórmula y determinar, por ejemplo, un volumen? Y si las dimensiones no son fijas, ¿cómo se podría hacer? Estos y otros interrogantes pueden responderse con el análisis del funcionamiento de los modelos polinómicos. Para comenzar a desarrollarlos, les proponemos el siguiente problema:

P1. A partir de láminas metálicas cuadradas de 50cm de lado, se van a construir cajas de base cuadrada. Para ello se recortarán pequeños cuadrados en cada una de las esquinas, como se muestra en la figura, lo que permitirá, posteriormente, el plegado de la lámina metálica para armar la caja. Como el material irá soldado, no se necesita dejar pestañas para el armado.



El lado del pequeño cuadrado que se quita de cada una de las esquinas se simboliza en el diseño de la caja como la variable *x*.

a) Por cuestiones de diseño, se desea que la caja posea al menos una capacidad de 6000cm^3. Si x=2cm, ¿se alcanzará esa capacidad? ¿Y si x=4 cm? Explicá qué cálculos se han realizado para corroborar esos valores.

b) A medida que *x* aumenta, ¿es verdad que la capacidad de la caja aumentará siempre? ¿Por qué?

c) Escribí una expresión que permita calcular la capacidad de la caja cuando varía el lado *x* del cuadrado pequeño. ¿Qué cuestiones deberías tener en cuenta para elaborar esa expresión?

Para responder a las tres primeras preguntas, alcanzaría con determinar la capacidad que tiene la caja si la altura es 2cm, y luego si es 4cm.

En el primer caso: 46cm x 46cm x 2cm = 4232cm^3.

Y en el segundo: 42cm x 42cm x 4cm = 7056cm^3.

Estos primeros cálculos nos advierten sobre cómo influye considerar 2cm más de altura. Pero ¿es verdad que siempre que *x* aumenta, también lo hace la capacidad de la caja?

Para responder a este interrogante se hace necesario analizar la expresión de la capacidad de la caja si se considera variable al lado *x*, que resulta la siguiente:

$$\textbf{Capacidad: } c(x) = (50 - 2x).(50 - 2x).x \qquad (1)$$

Aplicando propiedad distributiva resulta:

$$c(x) = (50 - 2x)^2 . x$$

$$\mathbf{c(x) = 2500x - 200x^2 + 4x^3} \qquad (2)$$

(1) y (2) son dos formas diferentes de expresar una "función polinómica". La expresión (2) se conoce como expresión desarrollada y en general es de la forma:

$$\mathbf{f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0 . x^o}$$

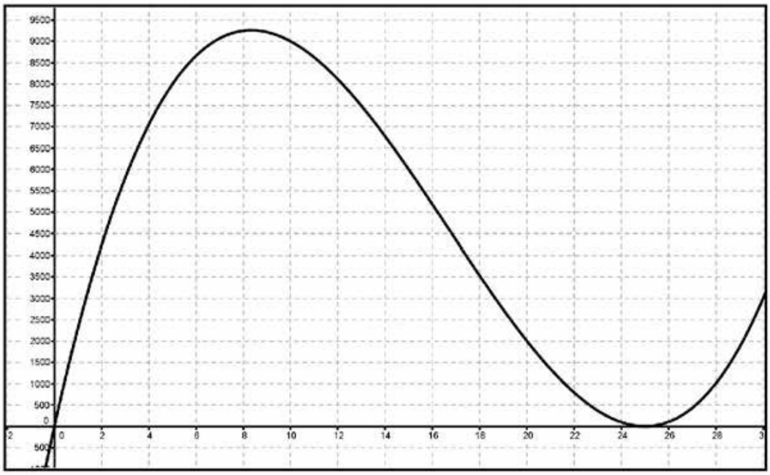
En la expresión anterior, puede identificarse cada uno de los componentes de la función:

Exponente: es el número al cual está elevado la variable independiente. El mayor exponente es lo que determina el grado del polinomio. Es un número entero positivo, incluido el 0.

Coeficiente: es cada uno de los números que multiplica a la variable independiente, y se llama "coeficiente principal" al que acompaña a la variable cuando está elevada a su mayor exponente. Los coeficientes pueden ser números reales.

La expresión (1) representada anteriormente, recibe el nombre de "expresión factorizada".

d) Al analizar las variaciones de la capacidad de la caja, considerando variable al lado del cuadrado quitado en cada esquina, la empresa responsable del diseño de la caja obtuvo el siguiente gráfico. ¿Qué dominio de la función es el que corresponde a la situación planteada?, ¿y su imagen? Si el valor de x aumenta el doble, ¿la capacidad de la caja también aumentará el doble? ¿Qué representan las raíces de la función para el diseño de la caja? ¿Para qué valor de x la capacidad de la caja será máxima?



El gráfico anterior, como es una forma de representar a la expresión simbólica de la expresión de la caja, permitiría responder a las preguntas anteriores. ¿Podrías escribir esas respuestas? Analizalas teniendo en cuenta el contexto del problema.

También el gráfico permite estimar la capacidad máxima de la caja que se obtiene cuando *x* es aproximadamente 8cm.Para determinar este valor, de una forma más precisa, se hace necesario el conocimiento de otros conceptos matemáticos que exceden a los propósitos de este curso.

Ahora bien, ¿qué nos informan las expresiones simbólicas (1) y (2), que son equivalentes entre sí?

La primera, como el gráfico, permite identificar rápidamente a los ceros o raíces. Si planteamos la condición que requiere el cálculo, resulta:

$$0 = (50 - 2x).(50 - 2x).x$$

Esta ecuación se verifica, si ***x=0*** o ***x=25***.

Ahora también, habría que analizar la significatividad en el contexto del problema.

La segunda expresión $c(x) = 2500x - 200x^2 + 4x^3$, permite identificar la intersección con el eje de las ordenadas. En este caso es también 0.

4. 3. Un caso particular de los modelos polinómicos. Los modelos cuadráticos

Volvemos al problema del diseño de la caja. Ahora, estudiaremos cómo varía la superficie de la base de esa caja, al variar también la medida del lado $\boldsymbol{x}$.

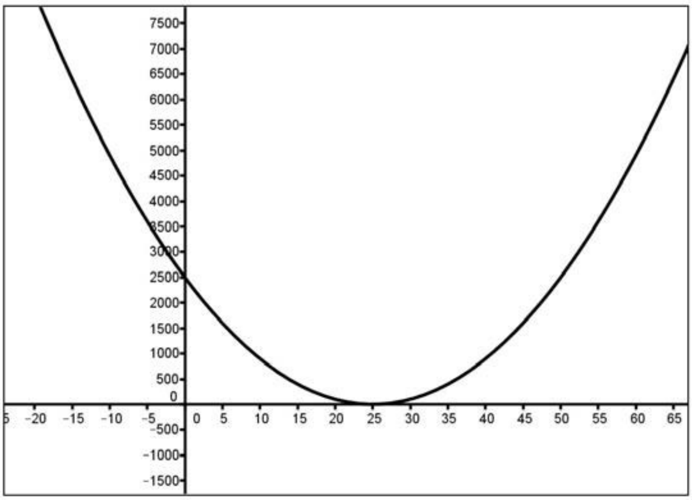
La función queda modelizada por la siguiente expresión:

$$\text{Superficie: } s(x) = (50 - 2x)\,(50 - 2x)$$

$$s(x) = (50 - 2x)^2$$

a) Determiná raíces e intersección con el eje de ordenadas y dominio de la función. Interpretalas según el contexto del problema.

b) Para completar el análisis, consideremos la gráfica de la función obtenida sin la restricción del dominio a los fines del análisis.



Nuevamente, se visualizan las raíces (que en este caso es una raíz única) y el mínimo, que se llama "vértice de la parábola", y en esta situación coincide con la intersección con el eje de abscisas.

Observamos que en este caso se obtiene una raíz, la cual se determina usando la condición de que la ecuación resulte igual a cero. En este caso, eso se verifica para x= 25.

Por otra parte, la gráfica tiene un comportamiento simétrico. Si trazáramos un eje vertical que pase por el vértice, podríamos ver que cada valor tiene un simétrico (a excepción del vértice precisamente). Esta característica podría ser de utilidad para elaborar un gráfico aproximado de la función.

Para los casos en que las parábolas tengan 2 raíces reales distintas, al tener el gráfico un comportamiento simétrico, el eje de simetría pasará por el punto medio entre esas dos raíces.

P2. Ahora estudiaremos la variación de la superficie lateral de la caja, construida sobre la lámina cuadra de 50cm, cuando varía x.

a) Escribí la expresión simbólica de esa superficie lateral. ¿Qué modelo la representaría? ¿Por qué?

b) Calculá, sobre la base de la expresión, los ceros o raíces, la intersección con el eje de ordenadas y su vértice. Interpretá esos resultados para el contexto del problema

c) Realizá, aproximadamente, la representación gráfica correspondiente.

d) Si x= 4cm, ¿qué valor de superficie lateral tiene la caja? ¿Para qué otro valor de x se obtendría la misma superficie?, ¿cómo lo calculás?

e) Si x toma el valor del vértice, para la superficie lateral, ¿qué dimensiones tiene la caja? ¿Son adecuados esos valores para confeccionar una caja?, ¿por qué?

P3. Consideremos ahora el caso en que la lámina metálica no fuera cuadrada sino rectangular, de 50cm por 40cm. Sobre esa placa se construirán cajas, como se indicó anteriormente.

a) Escribí las expresiones simbólicas de las funciones correspondientes, tanto de la capacidad de la caja, como de la superficie de su base, considerando variable al lado x.

b) Determiná ceros o raíces, intersección con el eje de ordenadas y máximos, en cada caso. Formulá preguntas para estudiar las variaciones correspondientes. Trabajá con los gráficos o expresiones simbólicas según te resulte más conveniente.

c) Esbocen, entre todos, qué características son las que se identifican en los modelos cuadráticos.

Las fórmulas que modelizaron cada una de las situaciones antes propuestas pertenecen a la familia de las funciones polinómicas. También pertenecen a esta familia las funciones lineales trabajadas en el Capítulo 3.Más allá de esta pertenencia existen matices entre cada una de ellas. Analicen sus expresiones generales e identifiquen similitudes y diferencias.

4.4. Una variación rápida: los modelos exponenciales

P4. En un laboratorio se realiza un estudio sobre la reproducción bacteriana. Para ello se coloca una población de 10 bacterias en una probeta el día 10 de mayo del 2014 a las 8 de la mañana. Se observa su reproducción a través de sistemas digitales que permiten contarlas con precisión. El primer cálculo se realiza exactamente 1 día después, el que da un resultado de 20 bacterias. Conteos posteriores permiten evidenciar que cada 24horas las bacterias se duplican.

a) ¿Cuántas bacterias habría en el cultivo al cumplirse 2 días desde que se colocara la muestra? ¿Y a los 3 días?

b) ¿Cuántas bacterias habría en el cultivo a las 20 horas del día 14 de mayo?

c) Realizá un gráfico cartesiano ubicando los días transcurridos en el eje de las abscisas y la cantidad de bacterias en el eje de ordenadas. Marcá en el gráfico, como puntos, los pares ordenados obtenidos en los ítems anteriores del problema. ¿Cómo quedan ubicados esos puntos? ¿Están alineados? ¿Determinan algún gráfico similar a los estudiados hasta ahora? Proponé una fundamentación.

d) ¿Cuál de las siguientes expresiones modelizaría la variación de la cantidad de bacterias según los días transcurridos? ¿Por qué?

$B(x) = 10 + 2.x$ $\qquad$ $B(x) = 10.24^x$ $\qquad$ $B(x) = 2.10^x$

$B(x) = 10.2^x$ $\qquad$ $B(x) = 2.t^x$

- ¿Es similar la fórmula seleccionada a las que se utilizaron en los modelos anteriores? ¿Por qué? ¿Dónde se ubica la variable independiente en este caso?

En este problema se ha trabajado con una variable (cantidad de bacterias) que varía de una forma particular. En este caso, por cada día que pasa, la cantidad de bacterias se duplica. Este tipo de variación se denomina exponencial, y el modelo que la representa es la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = K.a^x}$, con las condiciones: $\mathbf{a > 0}$ y $\mathbf{a \neq 1}$.

El valor **a** recibe el nombre de **base** de la función exponencial[1]; el factor **K** es un valor constante que representa la **cantidad inicial** de los elementos expuestos al crecimiento exponencial.

1. Las variaciones de una población, del capital ingresado en un banco o la desintegración de sustancias radioactivas son algunos ejemplos que se comportan de acuerdo con modelos exponenciales. Dentro de estos modelos existen dos bases particulares que son de gran interés en diversas aplicaciones: el número 10 y el número *e*, siendo las expresiones de los modelos, $\mathbf{f(x) = k.10^x}$ y $\mathbf{g(x) = k.}e^{\mathbf{x}}$. El número *e*, presente en muchas variaciones de índole biológico y poblacional, es un número irracional, pues posee infinitas cifras decimales no periódicas; su introducción en la matemática se debe al Euler, y sus primeras cifras decimales son 2,718281828.

- ¿Por qué el valor **a** debe ser mayor a 0 y distinto de 1?
- ¿Por qué al factor K se lo llama valor inicial? ¿Cómo se evidencia esto en el problema analizado?

P5. Cuando hablamos de la ganancia obtenida por el ahorro de un cierto dinero o del costo extra al pagar un crédito o una tarjeta, nos referimos a un índice matemático en particular: **el interés**. Normalmente se menciona el interés en períodos anuales, aunque a veces se utilizan períodos de tiempo diferentes como los meses o los días.

El **interés compuesto** es aquel que se obtiene cuando a un capital invertido se le suman periódicamente los intereses producidos, lo que deja como inversión el capital inicial y los intereses obtenidos, por lo que se obtienen intereses sobre los intereses.

Supongamos que queremos invertir nuestros ahorros de $10.000 en un plazo fijo de un banco que otorga una tasa de interés compuesto del 15% anual. Si mantenemos reinvirtiendo tanto el dinero inicial como los intereses, sin retirar nada del plazo fijo durante un lapso de 3 años:

a) ¿Cuánto dinero tendrías invertido en el plazo fijo al cabo de un año?

b) ¿Y al cabo de dos años? ¿Y de tres años? ¿Qué operaciones deberías realizar para resolver estos ítems?

c) Tomando en cuenta que la expresión que permite calcular el capital a recibir es de la forma $\mathbf{C(t) = Ci \cdot (1 + a)^t}$, siendo **C** el capital por recibir; **Ci**, el capital inicial depositado, **t,** el tiempo en años y **a,** el porcentaje de interés que ofrece el banco, que se encuentra expresado en notación decimal.

I) ¿Qué representa para la expresión el valor $(1 + a)$?

II) Ajustá dicha expresión con los valores concretos de esta situación.

P6. Thomas Malthus analizó el crecimiento de las poblaciones y estableció, en 1798, la relación entre el tiempo y el número de individuos de una población, luego de obtener el modelo: $\mathbf{f(t) = k \cdot e^{r.t}}$, donde **k** es la población al momento de realizar un censo (el cual se considera como el momento inicial), **t** es el tiempo transcurrido en años desde ese valor inicial y **r** es una constante específica de cada población, llamada "tasa de crecimiento poblacional".

El censo nacional de 1991 contabilizó un total de 254.940 residentes en el partido de Florencio Varela, mientras que en el censo 2001 se registraron 348.970 habitantes[2]. El análisis de estos y otros datos permitió estimar una tasa de crecimiento poblacional anual del 3,54% a partir de ese año 2001.

a) Utilizá el modelo de Malthus para escribir una expresión que permita estimar la cantidad de habitantes que tendrá el partido de Florencio Varela en un año cualquiera, tomando como valor inicial el registrado en el censo 2001.

b) A partir de la expresión simbolizada, calculá la cantidad de habitantes que tendría que haber tenido el partido de Florencio Varela en el año 2010.

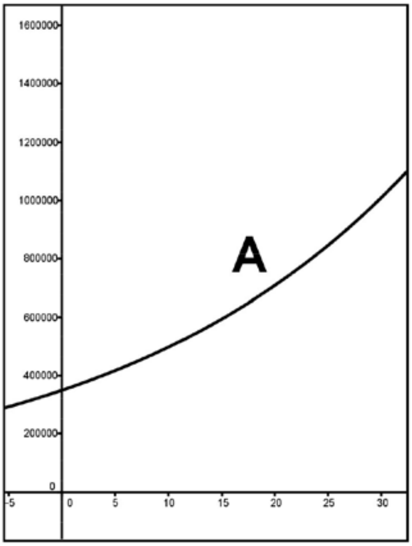
c) Compará el resultado obtenido con el valor registrado en el censo 2010 (426.005 habitantes). ¿La variación de población se dio de acuerdo a lo esperado?

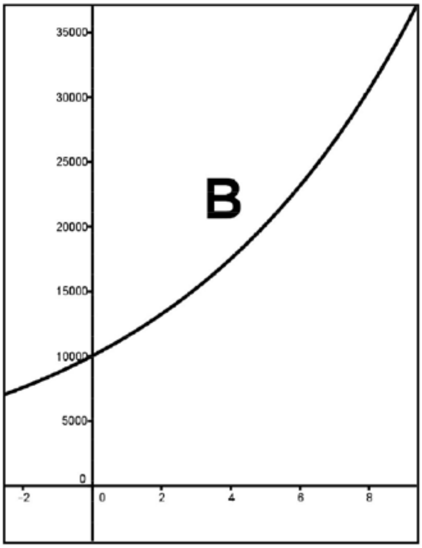
d) Utilizando el modelo, analizá cómo variará la población de Florencio Varela desde el 2010 hasta el año 2150. ¿Puede ser fiable el valor obtenido? ¿Por qué?[3]

2. Indec: http://www.indec.mecon.ar/censo2001s2_2/ampliada_index.asp?mode=04

3. El modelo de Malthus no considera posibles problemas que pueden existir en una población, como por ejemplo, la falta de superficie para seguir siendo poblada. No obstante el modelo es válido para breves períodos de tiempo. En 1838, Pierre Verhulst, propuso la llamada "función logísitica", que considera un crecimiento exponencial de la población, pero luego de un cierto período de tiempo, predice un "estancamiento". Esa función es utilizada en la actualidad para predecir variaciones poblacionales, incluyendo también las de los usuarios en redes sociales informáticas como Facebook.

P7. a) Los gráficos A y B se corresponden con los modelos de los dos problemas anteriores. ¿Cuál pertenece a cada uno de ellos? ¿Qué elementos consideraste para realizar la identificación?





b) A diferencia de los modelos anteriores, existen también variaciones exponenciales que decrecen. ¿Qué condición debe darse en la expresión del modelo para que esto ocurra? ¿Por qué? Buscá ejemplos concretos de variaciones exponenciales que sean decrecientes.

4.5. En la búsqueda de un exponente. El modelo logarítmico

P8. Volvamos al problema **P4.** (el de las bacterias) de este capítulo. En esa situación teníamos una población inicial de 10 bacterias que se reproducían siguiendo el modelo $\mathbf{B(x) = 10.2^x}$, donde *x* es la cantidad de días desde que comenzó el estudio. A partir de este modelo hemos sido capaces de analizar la variación de la cantidad de bacterias, calculando su cantidad medida que pasaban los días.

¿Pero qué ocurre si ya conociéramos la cantidad de bacterias presentes en la muestra y, en función de ese valor, quisiéramos saber la cantidad de días que transcurrieron desde que comenzó el estudio? Concretamente podríamos preguntarnos, por ejemplo, ¿cuántos días deberían transcurrir desde el inicio del estudio para que en la muestra existan 640 bacterias?

Simbólicamente, supone resolver el siguiente cálculo: **$640 = 10.2^x$**, expresión que es equivalente a **$64 = 2^x$**. En este caso, ¿cómo calculamos el valor de *x* que ocupa el lugar del exponente? Este tipo de cálculo que debemos realizar recibe el nombre de "logaritmo".

El logaritmo de un número, en una determinada base, es el exponente al que hay que elevar la base para obtener ese número. Simbólicamente:

$$b^x = a \leftrightarrow x = log_b a$$

Por ejemplo, como $2^5 = 32$ decimos que el logaritmo en base 2 de 32 es 5 (simbólicamente $\log_2 32=5$). ¿A qué exponente hay que elevar el 3 para obtener como resultado 81?El exponente debe ser 4, porque $\log_3 81 = 4$.

En el problema anterior teníamos $2^x = 64$, por lo que para calcular el valor de x debemos calcular el logaritmo en base 2 de 64:

$$2^x = 64 \leftrightarrow log_2 64 = x \quad , \quad x = 6$$

Sabemos entonces que $2^6 = 64$, por lo que se puede afirmar para el problema, que a los seis días de comenzado el estudio, habría 640 bacterias.

- ¿A qué exponente hay que elevar al número 4 para que el resultado sea 32?

Si bien algunas calculadoras permiten calcular un logaritmo en cualquier base, otras solo poseen la base 10 y la base *e*.[4] No obstante, es posible calcular con ellas cualquier logaritmo utilizando la propiedad que establece que $log_b a = \frac{log_n a}{log_n b}$, siendo *n* una base cualquiera, por lo que podemos utilizar alguna de las que ofrece la calculadora.

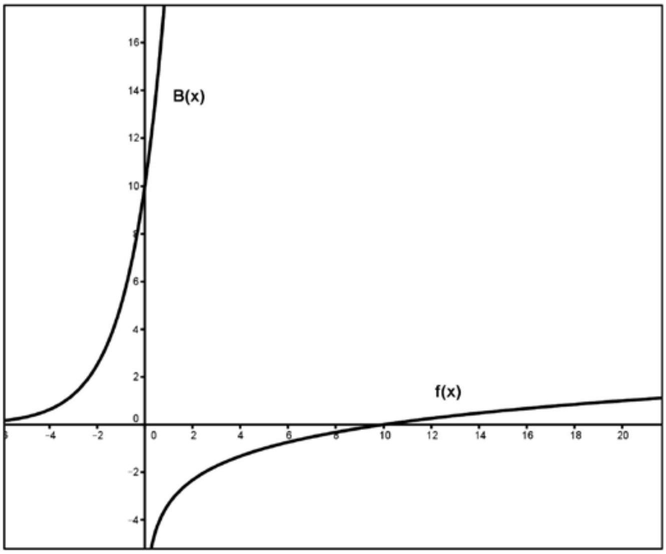
Dar una respuesta a la pregunta anterior, o sea, indicar a qué exponente hay que elevar al número 4 para que el resultado sea 32, supone resolver $log_4 32$. ¿Qué valor obtuvieron anteriormente? Verifiquen la estimación utilizando la propiedad presentada.

La expresión exponencial $\mathbf{B(x) = 10.2^x}$ nos permite calcular la cantidad de bacterias presentes en la muestra a medida que transcurren los días desde el inicio del estudio. También, a partir de esta expresión, es posible obtener otra función, la que permite determinar "cuántos días deberían transcurrir para que exista una cantidad de bacterias específica". Es decir, tendríamos que encontrar los valores del exponente de esa expresión exponencial, y para eso se hace necesario recurrir al modelo logarítmico, que es el que facilita ese cálculo de exponentes, en una determinada base. En este caso la función logarítmica que corresponde es $\boldsymbol{f(x) = log_2\left(\frac{x}{10}\right)}$, donde ahora *x* es la cantidad de bacterias que tiene el cultivo y *f*, los días que deberían pasar para lograr esa cantidad.

---

4. Al igual que ocurre con la función exponencial, estas dos bases son de gran interés en el trabajo con logaritmos por los distintos fenómenos que permiten modelizar. Cuando la base de un logaritmo es 10, por convención no se escribe. Los logaritmos con base *e* reciben el nombre de "logaritmos naturales" y se simbolizan "ln".

Los gráficos de ambas funciones, en un mismo sistema, son:



- Analizá, ¿cómo se obtuvo la expresión simbólica de *f*, a partir de la exponencial *B*?

- Analizá, ¿cómo se obtuvo la representación gráfica de *f*, a partir de la de *B*? Tomá algunos pares de valores de *B*, ¿cómo quedan ubicados en *f*? Fundamentá tu respuesta.

- Respondé: ¿cuál es el dominio y la imagen de la función *B*, según el contexto del problema? ¿Cuáles son para la función *f*?

- ¿Qué representa la raíz de *f* para la situación?

¿La función *f* tiene máximo? ¿Por qué?

P9. En otro estudio sobre reproducción bacteriana, se coloca inicialmente una muestra de 20 bacterias. Conteos posteriores evidencian que la cantidad de bacterias se triplica en cada hora que pasa.

a) ¿Cuántas bacterias habrá en la muestra al cabo de 3 horas? ¿Y al cabo de 5 horas? Escribí la expresión de la función ***h(x)*** que permite obtener la cantidad de bacterias presentes en la muestra de acuerdo con las horas transcurridas desde el comienzo del estudio.

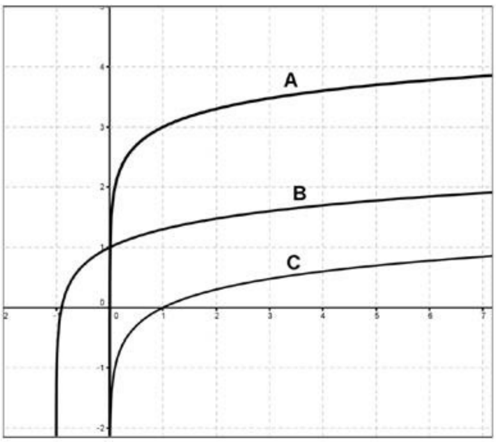
b) A partir de la expresión ***h(x)***, obtené la expresión de otra función ***g(x)*** que permita calcular la cantidad de horas que deben transcurrir para que, en la muestra, haya una cantidad determinada de bacterias.

c) ¿A qué tipo de modelo corresponde cada una de las funciones simbolizadas? Graficá ambas funciones en un sistema de ejes cartesianos. ¿Cuál es el dominio y la imagen de cada una de ellas de acuerdo al contexto del problema?

Identificá, si existen, raíces, máximos, mínimos e intersección con el eje de ordenadas, para cada función. ¿Qué representan estos puntos para la situación?

P10. Funciones y escalas logarítmicas

La escala de Ritcher es una de las más difundidas en los medios de comunicación, utilizada para medir los movimientos sísmicos. Muchas veces solemos escuchar que un cierto terremoto tuvo una marca de 5,2 o 7,4 en dicha escala. La escala de Richter es una escala logarítmica, cada incremento de una unidad representa una intensidad del terremoto diez



veces mayor, por lo que un terremoto de 6,5 será diez veces más potente que uno de 5,5.

La intensidad de los terremotos se mide mediante instrumentos llamados "sismógrafos". Estos instrumentos dibujan una traza con una cierta amplitud **A**. Cuando la amplitud de la traza varía, indica una variación en los temblores registrados en la superficie terrestre, por lo tanto, las variaciones de la magnitud **M** de un terremoto, en la escala de Richter, pueden analizarse según la amplitud de la traza. La expresión **M(A) = log A + 3** permite estimar el valor de la magnitud de un terremoto que ocurre a 100 km del sismógrafo, siendo A la amplitud de la traza medida en milímetros[1].

a) Cuál de los gráficos de la derecha representa las variaciones de la intensidad de un terremoto en función de las variaciones de la traza registrada? ¿Por qué?

b)Si un sismógrafo registra una traza de 2mm, ¿cuál es la magnitud del sismo? ¿Y si registra una traza de 20 mm?

c) Si un terremoto tiene una magnitud de 8 en la escala de Richter, ¿qué amplitud tendrá la traza que marcará el sismógrafo?

d) El 6 de octubre del 2011, se registró en la provincia de Jujuy un terremoto de 6,2 en la escala de Richter. Muchos años antes, en la provincia de San Juan, se registró uno de los mayores terremotos en la historia de nuestro país, fue el 27 de octubre de 1894, con una marca de 8,6 puntos en esta misma escala. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de San Juan con respecto al de Jujuy? ¿Por qué?

P11. El decibel (dB) es una unidad relativa que se utiliza para

---

[1] La expresión presentada está simplificada considerando una especialización de un modelo más complejo, para el caso particular de un sismo registrado a 100 km del sismógrafo. Por otra parte, para terremotos de intensidades mayores a 6,9, actualmente se utilizan otros modelos que consideran otras variables como por ejemplo la energía liberada.

expresar la relación entre dos magnitudes: la que se estudia y otra unidad de referencia. Esta unidad, que se utiliza también para medir magnitudes eléctricas y lumínicas, es más reconocida por su uso para medir la intensidad de un sonido. La clasificación de decibeles de un sonido está dada por la expresión $\boldsymbol{D(i) = 10.\log\left(\frac{i}{i_0}\right)}$, donde *i* es la intensidad del sonido medido e i_0 es la intensidad mínima del sonido percibido por el oído humano (comúnmente llamado "sonido umbral").

a) El sonido de un murmullo es equivalente a 115 veces el sonido umbral, ¿a cuántos decibeles equivale? ¿Y a cuántos decibeles equivale el sonido del despegue de un avión, que es aproximadamente 109000000000000 veces i_0?

b) Al día de la fecha, el récord Guiness de ruido en un estadio deportivo se registró en el Centurylink Stadium (Seattle, Estados Unidos), durante un partido de fútbol americano. La marca registrada fue de 137,5 dB. ¿Cuántas veces más intenso que el sonido umbral fue el ruido registrado?

P12. La sigla pH (potencial de hidrógeno) representa una medida utilizada en química que indica la concentración de iones o cationes de hidrógeno [H+] presentes en una sustancia. Esta medida sirve para indicar si la sustancia es ácida (pH menor a 7), neutra (pH igual a 0) o alcalina (pH mayor a 7). La introducción de este término fue realizada por el danés Sorensen, en 1909, quien lo definió como el logaritmo decimal del inverso de la concentración de iones de hidrógeno (Bocco, 2010). Por ejemplo, si una sustancia tiene una concentración de iones de hidrógeno igual a 0,0000006, podemos calcular su pH como: pH = - log (0,0000006).

a) La concentración de iones de hidrógeno de la cerveza es de 0,011089. ¿Cuál es su pH? ¿Y cuál es el pH del agua de mar si se sabe que su concentración de iones de hidrógeno es de 0,0003354?

b) El café tiene un pH de 5,0. ¿Cuál es su concentración de iones de hidrógeno?

c) Una disolución concentrada de ácido clorhídrico, conocido comercialmente como ácido muriático tiene un pH de 0,9. ¿Cuál es su concentración de iones de hidrógeno?

d) En las piletas de natación se espera que el valor del pH del agua oscile entre 7 y 7,8, ya que fuera de ese intervalo, el agua puede provocar irritación de la piel, los ojos y la mucosa, lo que puede también afectar corrosivamente los metales como rejillas y filtros. Si la concentración de iones de hidrógeno del agua de una pileta de natación es de 0,0000000352, ¿es recomendable su uso? ¿Por qué?

e) Elaborá un gráfico que represente la variación del pH de una sustancia en función de su concentración de iones. Indicá qué elementos deberías considerar para su construcción.

P13. Te invitamos a leer los siguientes fragmentos escritos por el matemático John Paulos (1990; 147-153). Allí el autor desarrolla algunas ideas sobre de la utilización de escalas logarítmicas.

> "Hace varios años, los supermercados empezaron a unificar el modo de poner los precios (pesos por kilogramo, por litro de líquido, etc.) para que los consumidores pudieran disponer de una referencia uniforme con la que medir el valor. Si la comida para perros y las tartas precocinadas pueden ser racionalizadas por ese método, ¿por qué no podría inventarse una especie de "índice de seguridad" aproximado que nos permitiera hacernos una idea de los peligros que entrañan determinadas actividades, procedimientos y enfermedades? Lo que pretendo sugerir es una especie de escala Richter que podría servir a los medios informativos para refiriese abreviadamente a distintos grados de riesgo.
>
> Al igual que la escala de Richter, el índice que propongo sería de tipo logarítmico, y por ello, nos entretendremos un poco en repasar esos horribles monstruos del álgebra del instituto: los logaritmos. El logaritmo de un número es simplemente la potencia a la que hay que elevar el número 10 para obtener el número en

cuestión. El logaritmo de 100 es 2 porque 10^2=100; el logaritmo de 1000 es 3 porque 10^3=1000; y el de 10000 es 4, pues 10^4=10000. El logaritmo de un número comprendido entre dos potencias de 10 tiene un valor comprendido entre la potencia inmediatamente anterior y la inmediatamente posterior. Así por ejemplo, el logaritmo de 700 está comprendido entre 2, que es el logaritmo de 100, y 3, que es el de 1000; y resulta ser aproximadamente 2,8.

El índice de seguridad funcionaría del modo siguiente. Consideremos una actividad determinada en la que se produce un cierto número de muertos al año, conducir un automóvil, por ejemplo. Cada año muere un norteamericano de cada 5300 en accidente de automóvil. El índice de seguridad correspondiente a viajar en automóvil sería pues un relativamente bajo 3,7, esto es, el logaritmo de 5300. Y en general, si como resultado de cierta actividad muere al año una persona de cada x, el índice de seguridad de esa actividad será simplemente el logaritmo de x. Así pues, a mayor índice de seguridad, más segura será la actividad en cuestión.

[…] Según estimaciones de los Centros de Control de Enfermedad, en los Estados Unidos se producen unas 300000 muertes prematuras por fumar, lo que equivale a un norteamericano de cado 800 muere del corazón los pulmones y otras enfermedades producidas por el tabaco. El logaritmo de 800 es 2,9, con lo que el índice de seguridad de fumar es menor aún que el de conducir.

[…] Se estima que, cada año, menos de 50 niños norteamericanos son secuestrados por desconocidos, con lo que la incidencia de los secuestros es aproximadamente de uno entre 5 millones, de donde resulta un índice de seguridad de 6,7. Recuérdese que a mayor índice, menor riesgo, y que por cada unidad que aumenta el índice de seguridad, el riesgo disminuye en un factor 10.

[…] La virtud de tal índice de seguridad aproximado está en que nos proporciona, y sobre todo a los medios informativos, un cálculo del orden de magnitud de los riesgos que comportan distintas actividades, enfermedades y procedimientos, tiene sin embargo, un posible inconveniente debido a que el índice no distingue claramente entre la incidencia y a probabilidad. Si una actividad es muy peligrosa pero rara, producirá pocas muertes y tendrá, por tanto, un índice de seguridad alto".

A partir de la lectura:

a) Da ejemplos de otras situaciones que podrían indicarse mediante el índice de seguridad propuesto por el autor. Buscá información acerca de tales situaciones en nuestro país y calculá el índice propuesto.

b) Explicá con tus palabras el último párrafo del texto. Da ejemplos de las llamadas por el autor "situaciones raras y peligrosas".

c) Proponé alguna solución viable para el inconveniente de la construcción del índice que menciona el autor en el último párrafo.

d) Mencioná otras situaciones que pudiesen medirse y compararse mediante escalas logarítmicas.

4.6. A modo de cierre

Hemos desarrollado a lo largo de los capítulos 3 y 4 el estudio de funciones, analizando su concepto como una variación entre las variables puestas en juego, y su potencia para construir modelos matemáticos. En cuanto a estos, hemos presentado un recorte centrado en los modelos polinómicos (lineales, cuadráticos y cúbicos), exponenciales y logarítmicos. Existen otros modelos de interés, que también se caracterizan por su potencia en la modelización de variaciones y fenómenos concretos, como el fraccionario o el trigonométrico. Es probable que tengan la oportunidad de completar el estudio de lo aquí presentado en estudios posteriores. Esperamos que lo desarrollado en estos capítulos resulte una base sólida para la comprensión de la modelización matemática y cuál es su potencia en el mundo actual.

CAPÍTULO 5

Pasame el dato:

sobre la potencia de la incertidumbre

Fernando Bifano – Alejandra Almirón

5.1. Introducción

Cuando leemos el diario, vemos las noticias o recurrimos a algún libro, nos encontramos con una gran cantidad de números: fechas, distancias, códigos, precios, cantidades de asistentes a un evento, porcentajes de variación de precios, índices de natalidad, entre tantos otros.

¿De dónde salen estos números? ¿Son todos ellos del mismo tipo? ¿Dan cuenta de los mismos hechos? ¿Cómo sabemos que son confiables? ¿Qué información guarda cada uno de ellos? ¿Son objetivos? ¿Quién los produce? ¿Cómo lo hace? ¿En qué se basan?

Nuestra vida está rodeada de esos números sobre la base de los cuales sustentamos muchas de nuestras decisiones: personales, sociales, económicas y políticas.

La parte de la matemática que se encarga de su tratamiento y los considera como objetos de estudio se llama “estadística”.

Habitualmente consideramos que la matemática trabaja con cifras exactas, con certezas y con una única explicación —lo cual es cuestionable—, sin embargo, cuando se habla de estadística esto se torna más polémico. ¿Por qué? En la estadística, los números se transforman en datos sobre los cuales las personas toman decisiones, y en este capítulo vamos a analizar qué hay que saber leer detrás de cada uno de esos números para que las consecuencias de nuestras acciones sean las que buscamos y no otras.

5.2. Población y muestra

La siguiente nota se refiere al uso de Internet en América Latina. Te invitamos a prestar especial atención a los números que en ella aparecen y en su sentido.

CÓMO CRECE LA WEB EN AMÉRICA LATINA

Internet en la región

El uso de Internet como fuente de entretenimiento e información en América Latina va mucho más rápido que el crecimiento económico, aunque países como Nicaragua y Honduras «prácticamente nunca se han conectado», según un informe difundido por la corporación Latinobarómetro: «El 85 por ciento de la población de Sudamérica y el 84 por ciento de la población de Centroamérica tienen teléfono celular», precisa el estudio. Asimismo, la cantidad de personas que nunca usaron correo electrónico o conexión a Internet en la región disminuyó de 59 a 55 por ciento entre 2010 y el 2013.

El análisis destaca que entre 2011 y 2013 aumentó de 11 a 15 por ciento la cantidad de personas que usan Internet o correo electrónico todos los días. Los países que más frecuencia de uso tienen son Argentina (39 por ciento), Chile (34 por ciento) y Uruguay (30 por ciento), precisa el estudio realizado en 18 países con muestras representativas de la población nacional de cada país de 1000 y 1200 casos.

Respecto de las redes sociales, el informe concluye que se duplicó el uso de Facebook en tres años, al aumentar de 19 por ciento en 2010 a 38 por ciento en 2013. Destaca que los países que más usan esta red son Chile, con 51 por ciento; Argentina, con 50 por ciento, y Costa Rica con 48 por ciento, y los que menos la usan son Nicaragua, Honduras y El Salvador.

“Internet en la región” (2 de noviembre de 2013). *Página 12*: Sociedad. Disponible:http://www.pagina12.com.ar/diario/sociedad/3-232726-2013-11-02.html. [Consulta: enero de 2014].

Pensemos en las siguientes cuestiones:

I. ¿De dónde habrán sido extraídos los datos que expone la nota para que nos resulten confiables?

La estadística se basa en recolectar, analizar e interpretar datos de una población. La herramienta para recolectar esos datos es la encuesta o censo. Para realizarla se deben seguir varios pasos: el diseño del estudio; la recolección de datos; el resumen, la organización y el análisis de la información; la elaboración de conclusiones, la discusión de las limitaciones del estudio y, si es necesario, la elaboración de un nuevo estudio para dar cuenta de las preguntas que surgen a partir de este. Finalizada la secuencia se consigue conformar una información con los datos significativos para tomar decisiones. Estos datos son publicados para su uso.

P1. a) ¿Qué fuente de información cita la nota para exponer sus datos?

b) ¿Será el periodista que escribe la nota quien hizo el estudio estadístico? Fundamentá tu respuesta.

II. Retomemos el contenido de la nota periodística y preguntémonos: ¿a qué se refiere cuando habla de un estudio que se realizó en 18 países con una muestra representativa? ¿Por qué utilizan una muestra de la población? ¿Por qué esa muestra tiene que ser representativa? ¿Cómo se logra eso?

En muchos casos se quiere hacer un estudio y sacar conclusiones de una población que es muy grande o muy compleja, como es el caso de Latinoamérica. ¿Se imaginan encuestando a cada persona que vive en la región sobre el uso de Internet? ¿Cuánto tiempo demoraría el estudio? ¿A cuántas personas habría que preguntarle? ¿Cuántas personas se necesitarían para hacer la encuesta? ¿Quién recopilaría tantos datos?

Para estos casos, se realiza un proceso que se denomina “inferencia estadística”. Esto implica que el estudio se hace a un subgrupo o una **muestra** que represente a la población completa y se utiliza a la información obtenida, para sacar conclusiones sobre toda la **población**.

Una muestra se considera válida si es representativa: debe contener las características importantes de la población en la misma proporción en la que se da en la totalidad. Por ejemplo, no es lo mismo la cantidad de gente que vive en el campo que la que vive en la ciudad, y para realizar una muestra es importante respetar esas proporciones que pueden provenir de los datos registrados en los censos. Estos son estudios que se realizan a toda la población. En nuestro país, el Instituto Nacional de Estadística y Censos (INDEC) es el ente encargado de realizar periódicamente el censo poblacional del país para registrar las características básicas de la población, la vivienda, la actividad económica y agropecuaria de la Argentina.

P2. a) Según la nota, ¿a qué población se estudió sobre el uso de Internet?

b) ¿Cuántas muestras se realizaron? ¿Qué cantidad de casos se tomó en cada una?

c) Si se realizara un estudio estadístico similar solo en la Argentina, ¿encuestar a los habitantes de Buenos Aires sería una muestra representativa del país?, ¿por qué?

P3. Buscá, en diarios, revistas u otras fuentes, investigaciones periodísticas que contengan datos informativos. Analizá si se citan fuentes de obtención de esos datos, si se toman sobre la población o son muestras. Y, de ser posible, determiná si esas muestras son representativas.

P4. Si quisieras elaborar una muestra representativa para realizar un estudio sobre la proporción de materias aprobadas en la primera instancia por los estudiantes en la UNAJ: ¿qué características tendrías en cuenta para realizarla?, ¿incluirías a los profesores entre los encuestados?, ¿por qué?, ¿cómo elegirías a la muestra poblacional?

P5. A continuación te brindamos una tabla con los resultados obtenidos en el último censo —2010— sobre tipo de desagüe del inodoro, según provisión y procedencia del agua en los hogares de la provincia de Buenos Aires.

a) Leé la información de la columna “Provisión y procedencia del agua” y respondé: ¿Hay información repetida? ¿Cuántas veces se repite? ¿Qué relación guarda con la información que no se repite? ¿Qué relación poseen los títulos que no se repiten con los repetidos?

b) Leé la información “Total de hogares” y respondé: ¿qué cifras aparecen en los títulos que no se repiten? ¿Cómo se relacionan esos números con el total de hogares?

c) El cuadro es de doble entrada, por lo tanto la información que aparece en la columna de la izquierda se relaciona con la que se destaca en la fila de arriba. ¿Qué relación puede establecerse entre ambas informaciones?

d) Escribí un informe periodístico que explique los datos que despliega el cuadro. El desarrollo de la información debe contener los requisitos para que sea matemáticamente adecuado. Luego elegí un título y elaborá un copete.

Provisión y procedencia del agua	Total de hogares	Tipo de desagüe del inodoro				Sin retrete
		A red pública (cloaca)	A cámara séptica y pozo ciego	A pozo ciego	A hoyo, excavación en la tierra	
Total	**4.789.484**	**2.278.609**	**1.336.248**	**1.075.943**	**15.426**	**83.258**
Por cañería dentro de la vivienda	4.318.276	2.244.262	1.203.885	833.590	6.492	30.047
Red pública	3.389.588	2.158.456	646.245	558.093	4.487	22.307
Perforación con bomba de motor	857.066	78.698	533.723	236.686	1.329	6.630
Perforación con bomba manual	13.296	793	5.258	6.902	116	227
Pozo	51.087	4.577	15.985	29.617	228	680
Transporte por cisterna	4.099	1.502	1.132	1.200	120	145
Agua de lluvia, río, canal, arroyo o acequia	3.140	236	1.542	1.092	212	58
Fuera de la vivienda pero dentro del terreno	408.975	34.347	119.679	207.818	5.843	41.288
Red pública	187.938	29.040	41.111	90.705	2.867	24.215
Perforación con bomba a motor	176.033	4.212	69.392	87.300	1.612	13.517
Perforación con bomba manual	25.932	469	5.851	16.975	831	1.806
Pozo	16.442	501	2.812	11.386	327	1.416
Transporte por cisterna	1.568	85	280	930	85	188
Agua de lluvia, río, canal, arroyo o acequia	1.062	40	233	522	121	146
Fuera del terreno	62.233	-	12.684	34.535	3.091	11.923
Red pública	19.061	-	3.754	9.838	912	4.557
Perforación con bomba a motor	25.122	-	6.502	13.986	820	3.814
Perforación con bomba manual	5.659	-	916	3.407	360	976
Pozo	6.953	-	770	4.486	346	1.351
Transporte por cisterna	3.112	-	460	1.799	283	570
Agua de lluvia, río, canal, arroyo o acequia	2.326	-	282	1.019	370	655

Fuente: Censo Nacional de Población, Hogares y Viviendas (INDEC, 2010).

5.3. Cantidades, tasas, índices y porcentajes

Leamos este fragmento de un artículo periodístico:

LA JUSTICIA HIZO UNA ADVERTENCIA POR LA EXPANSIÓN DE ENFERMEDADES EN LA CABA POR EL TRABAJO ESCLAVO

Alerta por la expansión de la tuberculosis

Mientras a nivel nacional la incidencia de la enfermedad disminuyó 39 por ciento entre 1985 y 2011, en el ámbito porteño registró un aumento del 25 por ciento por el trabajo esclavo en talleres clandestinos de costura.

Por Mariana Carbajal

En una resolución sin precedentes, la Justicia alertó sobre la "expansión progresiva de la tuberculosis en la Ciudad de Buenos Aires", como consecuencia del trabajo esclavo en talleres clandestinos de costura, como ocurría a principios del siglo XX en las fábricas textiles. El informe, elaborado por el fiscal federal Nº 6 Federico Delgado, señala que mientras a nivel nacional la incidencia de la enfermedad disminuyó 39 por ciento entre 1985 y 2011, en el ámbito porteño registró un aumento del 25 por ciento, según estadísticas oficiales. El incremento estaría relacionado, advirtió, con las condiciones de hacinamiento y extrema vulnerabilidad socioeconómica y cultural en que viven las víctimas de trata para explotación laboral, muchas de ellas migrantes provenientes de países con altas tasas de incidencia de la tuberculosis como Bolivia. Para Delgado, el rebrote de tuberculosis es "un claro síntoma de las relaciones de explotación capitalista".

De acuerdo con la información suministrada por el Hospital Piñero, ubicado en el sur del barrio de Flores, el 60 por ciento de las personas infectadas atendidas trabajaban en talleres textiles clandestinos.

La resolución, a la que accedió *Página/12*, muestra un preocupante panorama sanitario vinculado con la trata y el trabajo esclavo en talleres textiles. Es una extensa investigación realizada a partir de la consulta a especialistas de distintos hospitales porteños, entre ellos del Piñero, Álvarez, Vélez Sarsfield y Muñiz, y de la Facultad de Medicina de la UBA.

La tuberculosis es una enfermedad infectocontagiosa producida por una bacteria (Mycobacterium tuberculosis), también llamado bacilo de Koch, que afecta fundamentalmente los pulmones, pero que puede hacerlo en cualquier órgano. "Se disemina por vía aerógena, por las gotitas que son vehiculizadas al toser o estornudar", precisa el informe. Y agrega: se trata de una enfermedad de diagnóstico sencillo, que puede ser tratada y curada gratuitamente en el país, pero "nos encontramos lejos de su erradicación", y en cambio, "se expande en correlación directa con la marginalidad social".

En la resolución, Delgado señala que "la evidencia indica que existe un vínculo vicioso que liga la pobreza al hacinamiento, la falta de vivienda y la precarización laboral, y ésas son las condiciones que le abren curso a este fenómeno".

El relevamiento revela que durante los últimos años los casos reportados entre la Ciudad y la provincia de Buenos Aires alcanzan más de 2000 por año.

La División Servicio Social del Hospital Muñiz, a cargo de Graciela Blanco, analizó 544 historias sociales para colaborar con la investigación de la Fiscalía, y encontró que sólo un 29 por ciento de los pacientes lograron adherir al tratamiento. El 41 por ciento relevado en el Muñiz son personas que se encuentran en situación de precariedad laboral, talleres de costura fundamentalmente.

El jefe de la División Tisioneumología del Hospital Muñiz, Domingo J. Palmero, informó a la Fiscalía que si bien la tuberculosis a nivel nacional disminuyó en un 39 por ciento entre 1985 y 2011, en la Ciudad de Buenos Aires aumentó un 42 por ciento: la tasa creció de 23,06 enfermos cada 100 mil habitantes a 32,82. En la zona de influencia del Hospital Piñero, "caracterizada por la gran cantidad de habitantes que viven en condiciones de extrema vulnerabilidad social", la tasa se eleva a casi 200 por 100 mil.

En su informe, el fiscal Delgado enfatizó la necesidad de combatir las condiciones de vulnerabilidad social que favorecen la trata de personas. "No se trata sólo de perseguir explotadores sino de erradicar las circunstancias que hacen posible la explotación, es decir, la existencia de colectivos de personas que sólo tienen para vender su cuerpo, su tiempo, su vida, todo lo que son a merced de un trabajo que los alimentará mientras los mata en suaves cuotas".

El texto completo puede consultarse:

"Alerta por expansión de la tuberculosis" (6 de enero de 2014). *Página 12*: El país. Disponible: http://www.pagina12.com.ar/diario/elpais/1-237124-2014-01-06.html. [Consulta: agosto de 2015].

¡Cuántas conclusiones se pueden sacar a partir de las estadísticas que se obtienen sobre la salud! Analicemos cómo y por qué los datos están presentados de esta manera.

En el artículo, la periodista explicita que durante los últimos años los casos que se reportaron en la Ciudad y en la provincia de Buenos Aires fueron más de 2000 por año. ¿Creen que son muchos o pocos? Es difícil dar una respuesta si no se tiene en cuenta en relación a qué se está midiendo. Si la población de esa región fuera de menos de 3000 habitantes, más de 2000 sería muchos, mientras que si la población fuera de miles de millones de personas, esa no resultaría una cifra tan abrumadora. En estos casos, los estadistas definen a esta información como una **cantidad** y para manejar datos con mayor nivel de precisión se suele trabajar con razones.

Una **razón** es el cociente entre dos cantidades. Existen distintos tipos de razones. En las estadísticas se utilizan tasas o porcentajes. Una **tasa** es el cociente dado por una cierta cantidad y una unidad elegida. Por ejemplo, en el artículo observamos que la escritora explicitó que la tasa de tuberculosis en la ciudad de Buenos Aires creció de 23,06 enfermos cada mil habitantes a 32,82. En este caso se está utilizando como unidad a mil habitantes. Al ser una tasa, a diferencia de cuando hablamos de cantidades, no podemos afirmar que 32,82 personas están enfermas, sino que 32,82 personas de cada 1000 lo están. Para conocer la cantidad total de enfermos deberíamos hacerlo proporcional a la cantidad de habitantes total de la ciudad.

Otro recurso que utiliza la estadística es el **porcentaje**: la unidad que se elige para establecer la relación es cien y, por lo tanto, el valor se encontrará entre 0 y 100. Si se divide al porcentaje por cien se obtiene la **proporción** de un total. En el artículo que estamos analizando se expone que el 60% de las personas infectadas atendidas en el Hospital Piñero trabajan en talleres textiles clandestinos; 60 de cada 100 enfermos atendidos en ese hospital trabajan en esas condiciones; hay una proporción de 0,6. Conocemos la relación, pero no sabemos cuántos fueron los pacientes atendidos, ni cuántos los casos concretos.

P6. Releé al artículo y respondé:

a) En la zona de influencia del Hospital Piñeiro la tasa se elevó a casi 200 por 100 mil. ¿Cuánto aumentó la tasa? ¿Cuántos pacientes más hay enfermos?

b) El 29% de los pacientes lograron adherir al tratamiento. ¿A qué se refiere con 29%? ¿Cuáles el número de pacientes?

c) En el ámbito porteño se registró un aumento del 25% por el trabajo esclavo en talleres clandestinos de costura. ¿Podrías afirmar que hubo 25 casos más? ¿A qué se refiere con un aumento del 25%?

5.4. Formas de presentar la información

En muchos casos, los datos se presentan en forma de tablas. En las que siguen, se muestra cómo se relacionan **cantidades** y **tasas** de la población argentina con distintas características de esta última:

Población económicamente activa según sexo, grupos de edad, posición en el hogar y nivel educativo

Total urbano (En miles de personas)

	1° Trim 10	2° Trim 10	3° Trim 10	4° Trim 10	1° Trim 11	2° Trim 11	3° Trim 11	4° Trim 11
Total	16.536	16.567	16.526	16.536	16.664	16.978	17.076	16.884
Sexo								
Varones	9.510	9.566	9.529	9.614	9.792	9.851	9.878	9.848
Mujeres	7.026	7.001	6.996	6.923	6.872	7.127	7.197	7.036
Edad								
Hasta 24 años	2.544	2.529	2.468	2.536	2.478	2.614	2.547	2.464
Entre 25 y 34 años	4.593	4.667	4.635	4.597	4.628	4.657	4.688	4.587
Entre 35 y 49 años	5.487	5.477	5.483	5.456	5.567	5.684	5.745	5.787
Entre 50 y 59 años	2.594	2.553	2.591	2.624	2.646	2.691	2.670	2.646
60 años y más	1.318	1.342	1.349	1.323	1.345	1.332	1.426	1.401
Posición en el hogar								
Jefe	7.879	7.916	7.937	7.993	8.104	8.223	8.274	8.316
Cónyuge	3.509	3.499	3.473	3.456	3.577	3.637	3.688	3.607
Hijo	4.007	4.027	3.953	3.969	3.876	3.980	3.931	3.893
Otros	1.141	1.125	1.163	1.119	1.107	1.138	1.183	1.068
Nivel educativo								
Hasta primario incompleto	856	860	866	826	834	828	843	808
Primario completo	3.109	3.015	2.937	3.047	3.038	3.033	3.032	2.988
Secundario incompleto	2.873	2.923	2.920	2.816	2.854	3.066	3.075	2.964
Secundario completo	3.995	3.940	4.054	4.087	4.124	4.148	4.133	4.215
Terc/univ incompleto	2.330	2.414	2.388	2.351	2.443	2.377	2.432	2.394
Terc/univ completo	3.373	3.415	3.360	3.409	3.373	3.525	3.561	3.516

Fuente: MTEySS - Subsecretaría de Programación Técnica y Estudios Laborales - Dirección General de Estudios y Estadísticas Laborales, en base a EPH (INDEC).

Tasa de actividad según sexo, grupos de edad, posición en el hogar y nivel educativo

Total de aglomerados relevados

	1° Trim 10	2° Trim 10	3° Trim 10	4° Trim 10	1° Trim 11	2° Trim 11	3° Trim 11	4° Trim 11
Total	46,0	46,1	45,9	45,7	45,7	46,6	46,7	46,1
Sexo								
Varones	55,1	55,4	55,1	55,4	55,2	55,6	55,8	55,4
Mujeres	37,6	37,5	37,4	36,8	36,7	38,1	38,2	37,3
Edad								
Hasta 24 años	17,4	17,5	17,1	17,3	16,8	17,8	17,2	16,7
Entre 25 y 34 años	80,0	81,2	80,4	79,9	79,3	80,6	80,5	79,3
Entre 35 y 49 años	81,7	81,4	81,2	81,4	81,6	81,9	83,2	82,6
Entre 50 y 59 años	73,9	72,4	73,1	74,3	74,7	75,7	75,7	74,8
60 años y más	25,5	26,3	26,5	25,7	25,6	25,5	26,9	26,6
Posición en el hogar								
Jefe	70,4	70,7	70,7	71,0	70,9	71,3	71,8	71,4
Cónyuge	53,5	52,4	52,2	52,3	53,1	53,5	54,6	53,5
Hijo	28,1	28,5	27,8	27,2	26,6	27,7	27,2	26,7
Otros	29,9	29,4	30,3	30,4	29,5	29,8	31,4	29,2
Nivel educativo								
Hasta primario incompleto	8,6	8,9	10,9	10,3	10,0	9,7	9,9	9,5
Primario completo	54,3	54,6	53,2	54,0	52,7	53,9	54,9	53,6
Secundario incompleto	40,6	41,1	45,2	44,0	43,8	46,0	44,6	43,9
Secundario completo	69,6	69,5	70,5	69,1	68,6	70,4	71,9	69,8
Terc/univ incompleto	60,2	61,6	61,7	62,2	62,3	60,7	61,5	61,3
Terc/univ completo	83,7	84,5	83,1	84,1	83,4	84,6	84,0	82,8

Fuente: MTEySS - Subsecretaría de Programación Técnica y Estudios Laborales - Dirección General de Estudios y Estadísticas Laborales, en base a EPH (INDEC).

A partir de su lectura: ¿podrías establecer qué relación se da entre ellas?, ¿qué informa cada una?

Como definimos al principio del capítulo, la estadística se ocupa de proporcionar información a partir de datos de diversa naturaleza. Esa información suele aparecer expresada a través de valores —numéricos o no—, que generalmente se denominan "datos". Estos se recogen a partir de la elección de las características o atributos que se quieran estudiar de una población o muestra de individuos u objetos: el peso o la altura de una persona, el color o la marca de un auto. Son características que se pueden constituir en las **variables** de un estudio. Las variables son características que se observan y se tipifican o cuantifican de forma de traducir los resultados en una **información**.

La información es producto de las variables que se eligen y no necesariamente valores objetivos de la realidad. En la elección de las variables está la intencionalidad que se pueda perseguir con un determinado estudio, ya que, cuando se lleva adelante, se presume que las variables elegidas van a influir de uno u otro modo en la información que se va a obtener. Por ejemplo, si se quiere estudiar el nivel de desocupación que hay en la Argentina, es muy importante definir a quién se considera un desocupado: la definición internacional explicita que es toda persona apta para trabajar que no tiene trabajo y lo está buscando. Pero ¿qué significa que no tenga trabajo? ¿Se considera desocupado a la persona que tiene un trabajo temporario? ¿Y si el trabajo es en negro? ¿Una hora de trabajo por semana es indicador de que tiene trabajo? Dependiendo de la definición que elijamos variará ampliamente el valor de la tasa de desocupación de una región. Con este ejemplo observamos que la elección de las variables que se realiza puede transformar los datos que se obtienen y, por lo tanto, generar distintas informaciones según la intencionalidad que tiene el estudio.

P7. ¿Qué variables utilizaron para construir las tablas que se analizaron?

P8. Si quisieras analizar el consumo medio de alimentos por semana que tiene una familia de cuatro personas, ¿qué variables utilizarías?

Si leemos la primera tabla nos enteramos que 16.536.000 personas están en situación económicamente activa en el primer trimestre del 2010: ¿esa cantidad representa mucho o poco?, ¿respecto de qué parámetro es mucho o es poco?

Podemos decir que más de 16 millones de personas es una gran cantidad de gente, pero no tenemos que olvidarnos de pensar en relación a qué. ¿Cuál es el total de la población que se está analizando? Para esto es mucho más útil mirar el dato de la tasa que relaciona la cantidad de personas económicamente activas con la población total. Los 16 millones de personas representan una tasa de 46, o sea que ni la mitad de la población total se encuentra económicamente activa.

P9. ¿Cómo harías para calcular la población total de la que se está hablando en el estudio precedente en cada trimestre?

P10. ¿En qué situaciones es conveniente transmitir la información con cantidades? ¿Y con tasas o porcentajes?

Los datos de las tablas no son todos numéricos.

Existen distintas variables: **las numéricas y las categóricas**. Los datos numéricos son los valores que adquieren las **variables numéricas**. Por ejemplo, en la primera tabla lo leemos en la cantidad de personas económicamente activas. Las **variables categóricas** responden a valores que pueden tomar esas variables. En nuestro ejemplo estas últimas serían el sexo, edad, posición en el hogar y nivel educativo. En general, las variables categóricas no responden a valores numéricos.

¿Cómo se eligen esas variables?

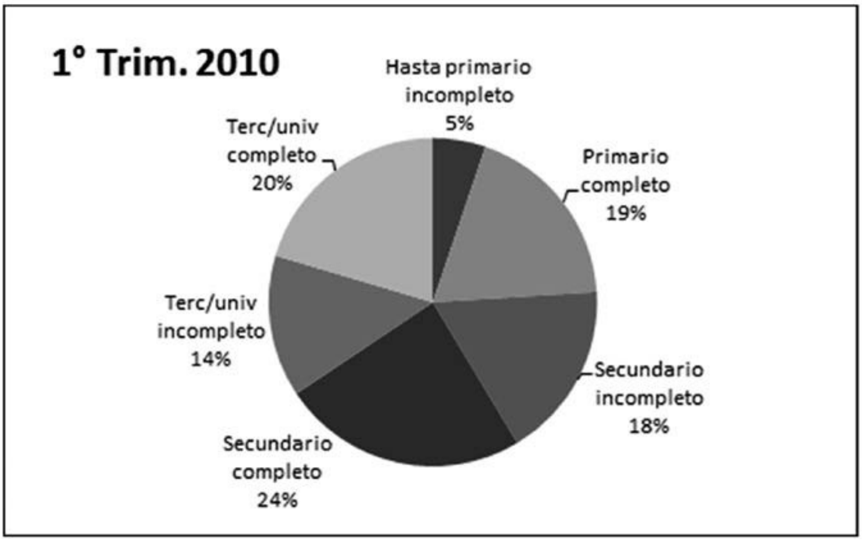
Si estamos hablando de variables para caracterizar a la población económicamente activa (como en las tablas de referencia) no sería relevante saber la altura o el peso de las personas. Sin embargo, conocer el sexo o la edad nos proporciona información interesante para construir qué tipo de sociedad tenemos o queremos.

P11. Si tuvieras que analizar qué medios de transporte son los más utilizados en Buenos Aires, ¿qué variables categóricas y numéricas utilizarías? ¿Por qué?

Existen muchas maneras de presentar y comunicar los datos además de las tablas. Una de ellas es a través de **gráficos**, que deben ser elegidos de acuerdo con el tipo de información que se quiere comunicar.

Si se quiere mostrar la relación entre las partes y la totalidad en una distribución de variables categóricas, el **gráfico circular** es el indicado, ya que dentro de cada sector del círculo se representa una categoría con un ángulo proporcional al tamaño de esa cantidad.

Si queremos representar los distintos niveles educativos con los que cuentan las personas económicamente activas que se presentan en la primera tabla, podríamos armar el siguiente gráfico circular:



Pero, ¿cómo construimos este gráfico?

El total de la población es 16.536.000 personas distribuidas en los 360° que abarca el ángulo central del círculo. Las diferentes cantidades se deben distribuir proporcionalmente en el gráfico. ¿Cómo hacer en el caso de un gráfico circular? Se debe establecer una equivalencia entre la cantidad de personas y la porción angular: los 360° equivalen a las 16.536.000 personas, entonces 3.995.000 personas equivalen a:

$$\frac{16.536.000}{360°} = \frac{3.995.000}{x}$$

$$x \approx 86{,}9°$$

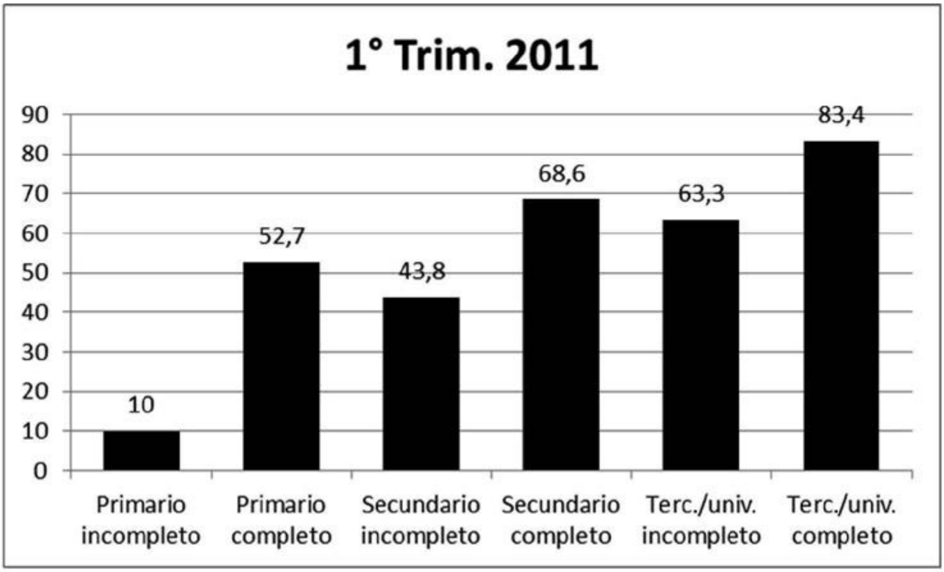
Se podría determinar el resultado en grados, minutos y segundos, pero a los fines de la tarea estadística, carece de significado tamaña precisión en la construcción del gráfico[1]. Marcando ese ángulo central, se va determinando qué región del gráfico le corresponde a esa categoría. Así, buscando la proporción de cada una, se va completando el ángulo central y construyendo el gráfico.

P12. Armá un gráfico circular con relación a los niveles educativos que tienen las personas económicamente activas similar al del texto, pero mostrando la relación de las tasas en el 4.to trimestre de 2011.

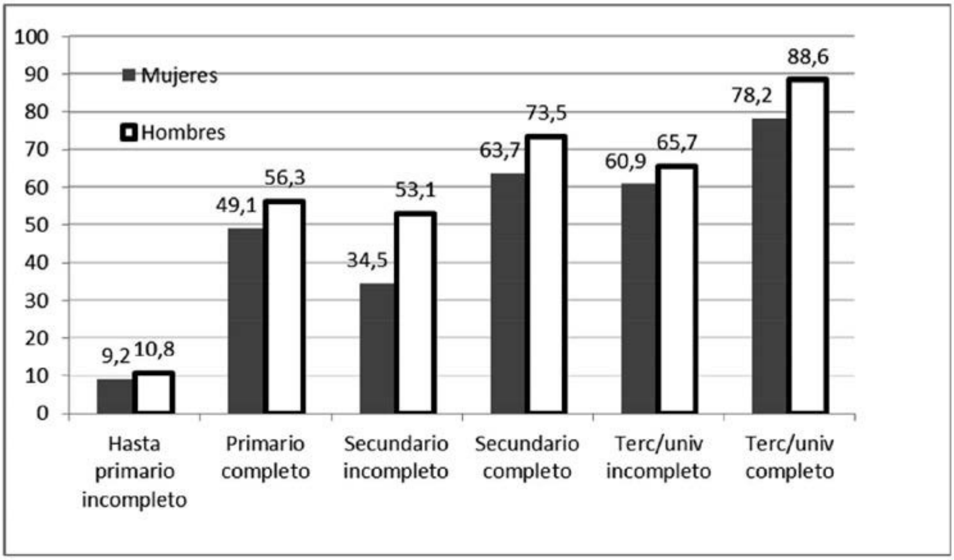
Otro gráfico muy conocido es el llamado **gráfico de barras**, usado cuando se quiere tener un panorama de cómo se distribuyen las cantidades de una variable categórica a partir de un simple golpe de vista. En este tipo de representación, la altura de cada barra debe guardar relación con el

1. Este tipo de gráficos se podría hacer directamente con la planilla de cálculo, que considera la posibilidad de realizar diferentes tipos de gráficos estadísticos. Desde nuestra perspectiva didáctica, creemos que vale la pena comprender la esencia del cálculo para luego poder recurrir al uso de la tecnología y suplir aquello que se vuelve tedioso e infructuoso.

valor que toma la variable en cada caso: lo importante es trabajar con una **escala** que permita comunicar eficazmente estas relaciones. El ancho de las barras es indistinto, pero debe ser el mismo para todas. El gráfico que se propone a continuación ilustra un ejemplo para el caso de los valores de la tasa de actividad según el nivel educativo para el primer trimestre de 2011.

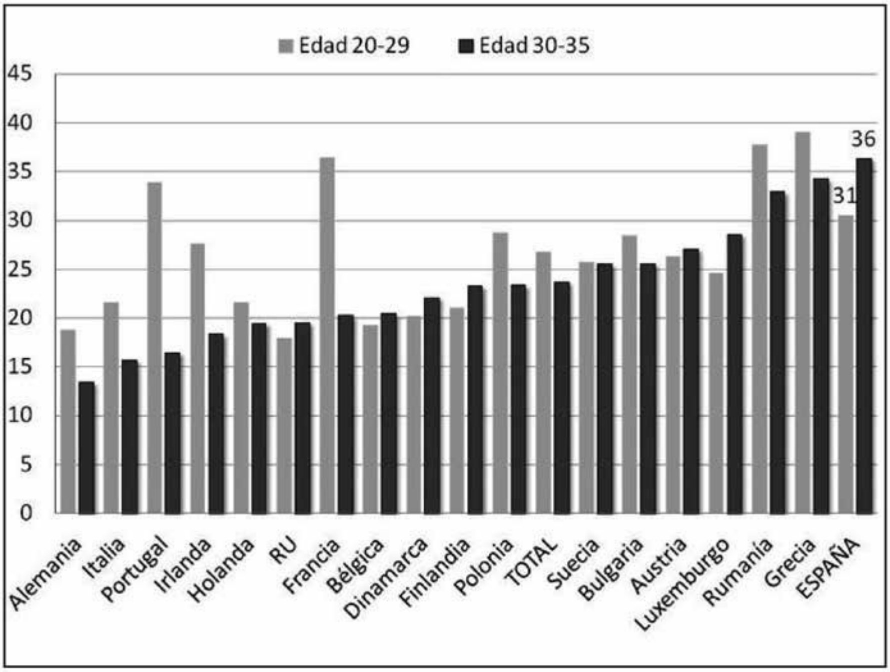


El gráfico de barras se puede utilizar también para comparar y poner en relación más de una variable categórica; si nos interesa relacionar qué pasa con el sexo de las personas económicamente activas con el nivel de estudios alcanzados podemos preguntarnos: ¿hay diferencias entre el comportamiento laboral de las mujeres y de los hombres en relación al nivel de estudios alcanzado? Veamos el siguiente gráfico que nos ilustra esta relación:



P.13. El diario español *Piedras de Papel* realizó una nota a finales del 2012, donde recopila algunos de los principales temas del año de ese país en forma de gráficos. A continuación les exponemos uno al que titularon "Fuga de cerebros", que representa el porcentaje de jóvenes europeos por grupos de edad y origen, con estudios superiores dispuestos a trasladarse a otro país para trabajar. Para más información sobre el artículo periodístico podés consultar:

http://www.eldiario.es/piedrasdepapel/2012_6_83701631.html



A partir de la lectura del gráfico, respondé:

a) ¿Es cierto que los españoles son los que tienen mayor disposición a trasladarse a otro país para trabajar? Fundamentá tu respuesta.

b) ¿Cuál es el país que menos movilidad tiene?

c) ¿En todos los países se trasladan trabajadores del mismo rango etario? ¿En cuáles se traslada una proporción mayor de jóvenes entre 20 y 29 años? ¿Y en cuáles entre 30 y 35?

Cuando se trata de representar gráficamente variables numéricas recurrimos a los **histogramas**, que están formados por rectángulos cuya altura se vincula con la cantidad en que se repite el dato llamada **frecuencia**; o vinculados con la proporción llamada **frecuencia relativa**. ¿Qué los diferencia entonces del gráfico de barras? En los histogramas el ancho de las barras es importante, ya que relaciona los valores de la variable numérica. Estos pueden agruparse en lo que se denominan **intervalos de clase**, que se utilizan para caracterizar a una variable según el interés que tenga el estudio y no es necesario que todos los intervalos tengan el mismo tamaño.

La variable edad está agrupada por intervalos de diferentes clases, según el sentido que tenga el agrupamiento de datos; pues como se trata de población económicamente activa carece de sentido considerar intervalos de clase entre 0 y 18 años. Si se tratara de un estudio para medir el trabajo infantil, es muy probable que tenga utilidad armar un intervalo de clase entre 12 y 18 años. El estudio sobre la PEA continúa con intervalos de años hasta llegar a los 60 años, donde no vuelve a tener sentido continuar separando la población porque posiblemente se las considere jubiladas. En el medio de estos, los intervalos de clase tampoco no son todos iguales. De todas maneras, para realizar el histograma se tiene que fijar una edad límite para ese intervalo de clase, quedando determinado el ancho de la barra que lo representa.

P14. Armá un histograma[2] que represente cómo se distribuyó en el cuarto bimestre del 2011 la PEA por edades, obteniendo los datos de la tabla correspondiente.

En los artículos leídos, te preguntaste ¿por qué al hablar de tasas encontramos que hay 52,7 personas cada mil que terminaron el nivel primario? ¿Será que debemos suponer que pueden existir 52,7 personas? ¿Serían 52 personas completas y una que le falta un poco?

Esto nos invita a pensar que existe otra clasificación dentro de las **variables numéricas**: es la distinción entre **variables discretas** y **variables continuas**. Las primeras son aquellas donde la variable numérica puede tomar determinados valores dentro de una distribución. Por ejemplo, en un estudio estadístico sobre familias, la cantidad de hijos pues una familia

2. El gráfico puede elaborarse con *software*. En este caso, la planilla de cálculo Excel ofrece dos variantes de gráfico: una denominado barra; la otra, columna. Te invitamos a que explores el programa y que saques conclusiones sobre los gráficos obtenidos de una y otra forma, y su relación con un histograma.

puede tener 0, 1, 2, 3 (o más) hijos. No podemos decir que la familia Pérez tiene 3,5 hijos. No es posible hablar de 3 hijos y medio.

Las variables continuas se consideran en el caso en que es factible que la variable numérica tome valores intermedios a los valores posibles. Por ejemplo, la estatura o el peso de las la mayor parte de nosotros medimos entre 1 y 2 metros, o sea que tenemos que especificar más. De hecho puede haber alguien mayor a 1,68 m y menor a 1,69m.

5.5 Media, mediana y moda

Para trabajar con una gran colección de datos, la estadística realiza una **medida resumen** de estos, expresándolos con un número que permite tener una idea rápida y aproximada de cómo se comportan todos los datos.

Existen distintas medidas resumen: la **media**, la **mediana** y la **moda**. Las tres definen un número que caracteriza el centro de un conjunto de datos, por lo que se las llama **medidas de posición central**.

La **media**, también llamada **media aritmética o promedio**, se obtiene sumando todos los datos y luego, dividiendo esa suma por la cantidad de datos que tiene el conjunto.

P. 15. Consideremos la siguiente situación:

En una competencia deportiva hay 10 jueces que, tras la actuación de cada competidor, le asignan una puntuación entre 0 y 10. Consideremos los puntajes obtenidos en la primera rueda de la competencia y calculemos el promedio de cada uno de ellos:

Competidor	Juez 1	Juez 2	Juez 3	Juez 4	Juez 5	Juez 6	Juez 7	Juez 8	Juez 9	Juez 10	Puntaje promedio
1	7	7	5	7	6	7	6	9	6	10	6,6
2	7	6	7	7	7	7	7	2	7	6	6,3
3	7	7	6	3	7	6	7	6	7	7	6,3

Algunos competidores se quejan de que hay jueces que perjudicaron a algunos de ellos, al haberles dado valores muy bajos, y beneficiado a otros, al haber otorgado valores altos. Por ello, la organización decide quitar dos notas a cada uno de los competidores: la mejor y la peor obtenidas en cada caso.

a. Averiguá: ¿cómo quedan los nuevos promedios de cada competidor? ¿Sobre qué cantidad de notas habría que recalcular los promedios?

b. ¿Resulta justa la decisión? ¿Por qué?

Existen otras formas de calcular la tendencia central de un conjunto de valores. Se puede recurrir a la **mediana**: se obtienen ordenando de menor a mayor los valores de un conjunto y considerando el que queda en medio de ellos. En el caso de ser una cantidad par de valores, se hace el promedio entre los dos valores que están en la mitad.

P16. Calculá la mediana en cada uno de los casos anteriores del problema 15. ¿Cambia el orden de los competidores si se considera la mediana en vez de la media?

Entre las medidas de tendencia central también es importante considerar la **moda**. Es muy simple de determinar pues es el valor que ocurre con más frecuencia. Esto quiere decir que una distribución podría no tener moda o incluso tener varias (ser multimodal).

P17. ¿Cuál sería la moda en cada uno de los competidores del problema 15? ¿Cómo resultarían las posiciones en la competencia considerando la moda?

P. 18. A continuación te presentamos un cuadro resumen con los datos recogidos a lo largo de las más de 10 temporadas que Emanuel “Manu” Ginóbili desarrolla su actividad como deportista en la NBA. Para cada sigla de la tabla, hay un glosario de referencia. Los datos han sido extraídos del sitio oficial de una cadena de deportes mundial. Se pueden consultar:

"Estadísticas de Manu Ginóbili". (s.f.).*ESPNDeportes*. Disponible: http://espndeportes.espn.go.com/basquetbol/nba/jugador/estadisticas/_/id/272/manu-ginobili. [Consulta: agosto de 2015].

REGULAR SEASON TOTALS

Temporada	Equipo	TCC-I	TC%	3PC-I	3P%	TLI-C	TL%	o	DR	Reb.	AST	BLOQ	ROB	PA	PE	PTS
'02-'03	SA	174-397	.438	51-148	.345	126-171	.737	47	114	161	138	17	96	170	100	525
'03-'04	SA	330-789	.418	88-245	.359	239-298	.802	86	258	344	291	16	136	181	161	987
'04-'05	SA	367-780	.471	97-258	.376	355-442	.803	75	254	329	288	27	119	190	172	1186
'05-'06	SA	309-669	.462	83-217	.382	280-360	.778	42	188	230	235	26	101	156	121	981
'06-'07	SA	396-854	.464	128-323	.396	320-372	.860	59	268	327	263	27	109	155	157	1240
'07-'08	SA	453-984	.460	156-389	.401	380-442	.860	63	291	354	332	33	109	173	200	1442
'08-'09	SA	223-491	.454	69-209	.330	168-190	.884	24	174	198	157	16	64	90	88	683
'09-'10	SA	398-903	.441	132-350	.377	309-355	.870	68	216	284	370	24	103	154	154	1237
'10-'11	SA	441-1018	.433	154-441	.349	357-410	.871	42	253	295	393	28	123	163	174	1393
'11-'12	SA	150-285	.526	52-126	.413	88-101	.871	18	98	116	151	12	24	56	64	440
'12-'13	SA	229-539	.425	83-235	.353	164-206	.796	30	171	201	274	13	80	114	132	705
'13-'14	SA	176-391	.450	59-167	.353	96-111	.865	21	119	140	188	9	42	78	86	507
Carrera		**3646-8100**	**.450**	**1152-3108**	**.371**	**2882-3458**	**.833**	**575**	**2404**	**2979**	**3080**	**248**	**1106**	**1680**	**1609**	**11326**

Glosario

MIN: Minutos
PTS: Puntos
TCC-I: Tiros hechos-intentados
TC%: Porcentaje de Tiros por Juego
3PC-I: Tiros de 3 puntos hechos-intentados
3P%: Porcentaje de Tiros de 3 Puntos
TLI-C: Tiros libres hechos-intentados
TL%: Porcentaje de Tiros Libres
o: Rebotes en ataque
DR: Rebotes defensivos
Reb.: Rebotes
AST: Asistencias
BLOQ: Bloqueos
ROB: Robos
PA: Faltas personales
PE: Balones perdidos
DblDbl: Doble Dobles
TriDbl: Triple Dobles
DQ: Descalificaciones
Expul.: Expulsiones
F.Téc.: Faltas Técnicas

a. ¿Cómo se obtiene el TC % en cada temporada? ¿Y el del total de la carrera?

b. ¿Cuál es el promedio de asistencias y cuál el de puntos por temporada?

c. ¿Cuál es el promedio de bloqueos y cuál el de robos a lo largo de la carrera?

d. ¿Pensás que podríamos determinar que estos promedios son representativos del desempeño actual de Manu? ¿Por qué?

e. Realizá un gráfico de barras donde relaciones los datos que te resultan relevantes para mostrar el desempeño de Manu a lo largo de su carrera.

f. Escribí una nota de opinión acerca del desempeño de Manu Ginóbili. Tu hipótesis debe justificarse a partir de las repuestas dadas a las preguntas anteriores. Luego, ponele un título. Utilizá el gráfico que se solicita en la consigna como paratexto de la nota acompañando el desarrollo de explicación.

5.6. Dispersión

Conociendo solo el valor central no podemos saber cómo se comportan todos los datos de la colección. Es importante tener en cuenta la **dispersión** que tienen el resto de los valores con respecto este: cuánto se alejan el resto de los datos del valor central con el que estamos trabajando. Esto es lo que se conoce con el nombre de **desviación o dispersión**.

Dado que esta medida intenta mostrar cuán esparcidos se encuentran los datos, la manera más simple de determinar la dispersión o variación es hacer la diferencia entre el mayor y el menor de los datos del conjunto. Esto se conoce con el nombre de **rango**.

Por ejemplo, si Mariana de 29 años calcula que el promedio de edad de sus amigos es de 30 años, podríamos intuir que tiene amigos de su edad. Pero si a eso le agregamos que el rango entre ellos es de 15 años, tenemos que tomar en cuenta que aunque el promedio sea muy cercano a su edad, existe por lo menos uno de ellos bastante más chico y otro bastante más grande –con una diferencia de 15 años–. Sin embargo, si el rango es de 2 años, podemos afirmar casi con seguridad que los amigos tendrán entre 29 y 31 años.

Otra manera de determinar la dispersión de los datos es a través del cálculo de la **desviación típica** o **estándar** que se identifica con la letra *s*. Para calcularla, se suman cada una de los cuadrados de las diferencias entre el valor medio y cada valor del conjunto, y se divide al total por la cantidad de elementos del conjunto de valores. A este resultado se le calcula la raíz cuadrada. En términos simbólicos[3]:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{N}(x_j - a)^2}{N}}$$

¿Cuál es la utilidad de este cálculo? Ya observamos que es útil tener una noción del promedio de los datos de un conjunto, pero también resulta importante tener una aproximación de cuánto se alejan el resto de los valores del promedio. Para hacerlo de modo sintético, en el caso del desvío estándar, se calcula el promedio de estos alejamientos. Este nos informa cuánto debería ser una dispersión "aceptable", o sea que nos permite visualizar si los valores reales se encuentran representados dentro del conjunto o no. Por esta razón, dado que la desviación puede ser tanto por exceso como por defecto —es decir, por encima o por debajo del promedio—, deben considerarse todas las diferencias como positivas para poder generar un promedio. Es por ello que se considera el cuadrado de las diferencias, y luego debe sacarse la raíz cuadrada de esta sumatoria.

3. Hoy por hoy, las calculadoras científicas permiten calcular este valor. Sería de utilidad que explores cómo podes hacerlo en tu calculadora.

P19. Volviendo a los datos que expusimos en el problema 18:

a) ¿Cuál es la dispersión de los valores de TC% a lo largo de las 12 temporadas?

b) ¿Cuál es el desvío de cada uno de los promedios calculados en las preguntas b y c del problema anterior?

5.7. Índice o coeficiente de variación

Determinar la dispersión de los datos con respecto al promedio es útil para poder comparar entre diferentes muestras y establecer cuál tiene mayor nivel de homogeneidad entre ellas. Para ello, una vez más se trata de apelar a establecer una relación entre valores. En este caso, se calcula el cociente entre la desviación y su valor promedio para obtener el coeficiente de variación (Cv).

$$C_{v=\frac{s}{\bar{x}}}$$

P20. Analizáentre qué valores puede variar este índice, y qué representaría en cada uno de los extremos con respecto a la homogeneidad o heterogeneidad de una muestra.

P21. En una fábrica que producen servilletas de distintos tamaños, tiene dos máquinas para cortarlas y doblarlas para ser luego envasadas. Para hacer un control de calidad, analizan y determinan el corte promedio de cada una de las máquinas: una de las máquinas corta las servilletas en un promedio por día de 60,01cm de ancho, con un desvío estándar de 0,02cm; mientras que la otra las corta en un promedio de 39,98cm de ancho, con un desvío estándar de 0,01cm. ¿Cuál de las dos máquinas trabaja en forma más homogénea?

P22. La siguiente tabla muestra los goles que realizó Lionel Messi en la selección mayor de la AFA.

TEMPORADA	PJ	GOLES
Eliminatorias 2006	3	0
Mundial 2006	3	1
Copa América 2007	6	2
Eliminatorias 2010	18	4
Mundial 2010	5	0
Copa América 2011	4	0
Eliminatorias 2014	13	8
TOTAL MAYOR OFICIAL	**52**	**15**
TEMPORADA	**PJ**	**GOLES**
Amistosos 2005	2	0
Amistosos 2006	4	1
Amistosos 2007	4	2
Amistosos 2008	2	1
Amistosos 2009	2	2
Amistosos 2010	5	2
Amistosos 2011	5	2
Amistosos 2012	4	7
Amistosos 2013	2	3
TOTALMAYORAMISTOSOS	**30**	**20**
TOTAL SELECCIÓN	**82**	**35**

A partir de estos datos:

a. ¿Qué relación existe entre la cantidad de partidos jugados (PJ) y los goles convertidos? ¿Cómo lo calcularías?

b. Realizá un gráfico de barras según la cantidad de goles que realizó tanto en partidos amistosos como en oficiales, desde el 2006 al 2013.

c. Calculá la media de los goles que realiza Messi por partido.

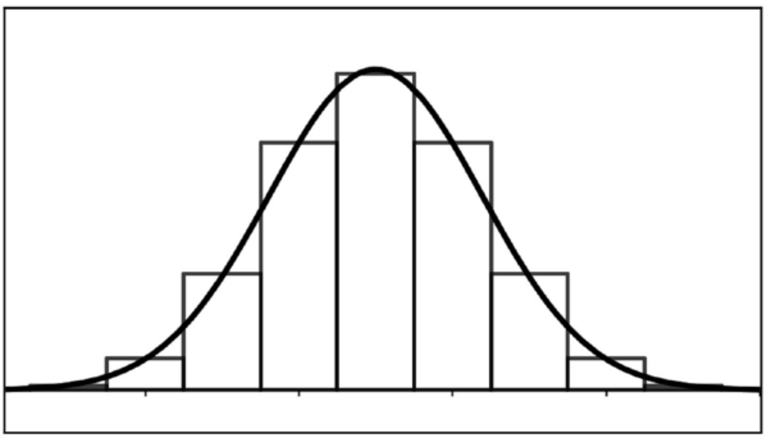
d. Calculá la media, mediana y moda de goles que realizó por temporada. ¿La media de la consigna anterior es igual a esta? ¿Por qué?

e. ¿Qué relación encontrás entre esos valores centrales? ¿Cuál te parece que es el que mejor describe su desempeño?

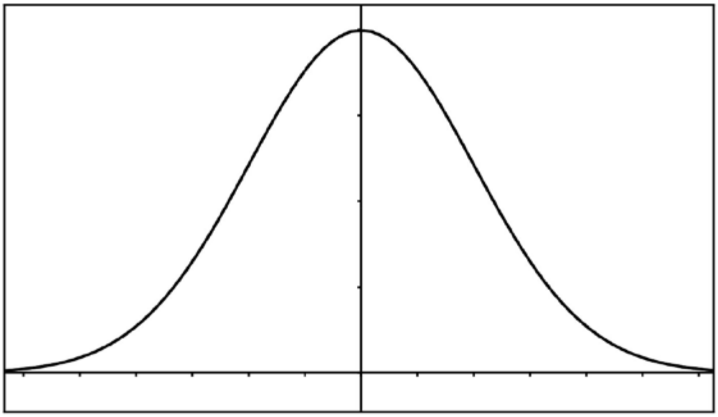
f. Calculá el rango de la colección de datos y el desvío estándar a los valores centrales. ¿Creés que éstos son aceptables (o sea que los valores centrales logran describir el comportamiento del jugador)? Fundamentá tu respuesta.

5.8. Distribución de frecuencias

En párrafos anteriores dijimos que los histogramas tienen un gran poder para comunicar visualmente la información. Si tomamos el punto medio de la base de cada barra del histograma, elevamos la altura hasta cortar cada rectángulo, consideramos cada uno de esas marcas unidas en un trazo continuo, obtenemos una curva que se conoce con el nombre de curva de "densidad".



Cuando la curva de densidad tiene un comportamiento simétrico —el valor central funciona como espejo para ambos lados— se la denomina "campana de Gauss", como vemos en la siguiente imagen:



Seguramente imaginarás que su nombre es en honor a algún matemático, como es el caso de Carl F. Gauss, pero ¿de dónde viene el nombre de campana?

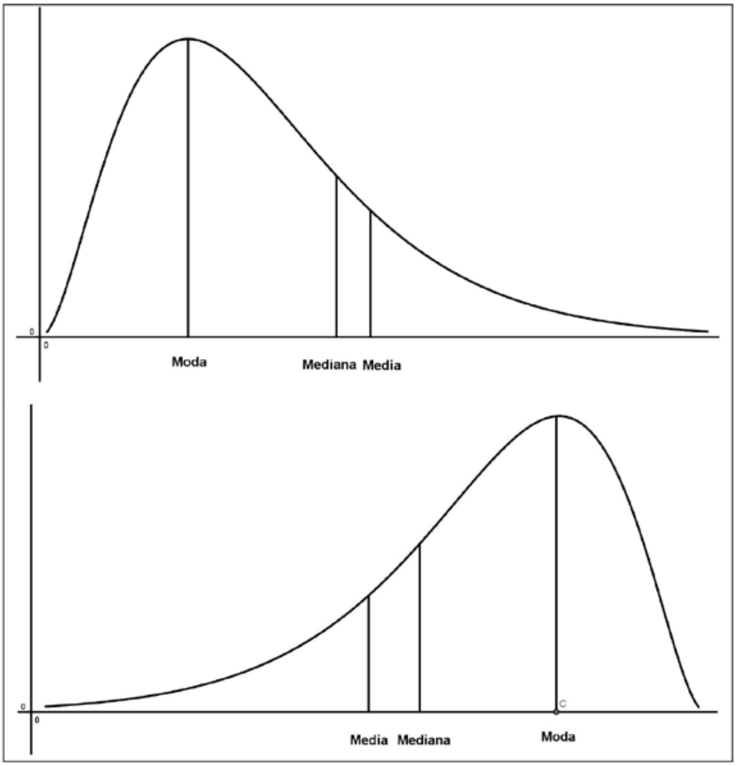
Un poco de historia (Kelmansky, 2009)[4]: la campana de Gauss es anterior a Gauss. Eso no es imposible, sino que es muy habitual que en matemática determinados conceptos adquieran el nombre no de quien lo produjo originalmente, sino de quien le dio trascendencia. Gauss fue el primero en utilizar esta curva allá por el 1809 para describir los errores cometidos por los astrónomos al hacer relevamientos de observaciones de los astros en formas repetidas. Alrededor de 1836 un estadista y sociólogo belga, de apellido Quetelet, amplió la aplicación a estudios antropológicos para caracterizar el comportamiento de las medidas corporales de los seres humanos. De hecho cerca de finales del siglo XIX, fue Galton —primo del naturalista Darwin— quien por primera vez llamó a la curva como "normal". Por su belleza y armonía, solía decir que evidentemente los griegos no la habían conocido sino la hubieran transformado en una deidad.

4. Es una adaptación de "Estadística para todos" de la Dra. Diana M. Kelmansky, 2009.

Las primeras investigaciones que se hicieron con relación a cuestiones antropomórficas como el peso, la altura o el tamaño de los miembros del cuerpo, reflejaron cierta simetría en la distribución de los datos: la mayor concentración se da en la parte media, y cierta distribución homogénea por debajo y por arriba de los valores promedios, como si fuera una campana. Pero no en todos los casos esto suele o debe ser así. No siempre la biología, la sociedad o la economía tienen distribuciones normales. Por ello, es importante analizar la relación empírica entre las medidas de tendencia central (media, mediana y moda):

- Cuanto más similares sean los valores entre estas tres medidas, más simétrica resultará la curva.

- Si la moda está muy por debajo de la media, la curva tendrá lo que técnicamente se denomina "sesgo" hacia la izquierda. Si esta relación es inversa, el sesgo estará hacia la derecha tal como lo ilustran los siguientes gráficos.



¿En qué tipo de estudios se prevé o se necesita de un comportamiento homogéneo? Si el comportamiento de los datos no lo es, ¿es legítimo sacar conclusiones? ¿Por qué se deben tener en cuenta estos sesgos para interpretar los resultados?

P23. Realizá un gráfico aproximado sobre una distribución donde los distintos valores centrales coincidan. ¿Por qué crees que será así?

P24. Te proponemos que recolectes algunos datos sobre los demás estudiantes, por ejemplo: edad, sexo, altura, número de calzado, etc. Hacelo por lo menos con 50 de ellos (si es necesario preguntá en otras comisiones también).

a. ¿Creés que esta muestra es representativa de la población de los estudiantes que ingresan a la universidad este año? ¿Por qué?

b. Realizá un gráfico que relacione el número que calzan y el género de los integrantes tu grupo. ¿Qué tipo de gráfico elegiste? ¿Por qué? ¿Es la tuya la única opción posible? Fundamentá tu respuesta.

c. ¿Qué conclusión podés escribir si calculás la media, la mediana y la moda de la altura de tus compañeros? ¿Por qué?

d. Usá la altura del curso y justificá si es una distribución normal. Graficá tu estudio. Calculala dispersión de la misma. Escribí con tus datos un texto humorístico matemáticamente inobjetable.

5.9. A modo de cierre

Presentados los conocimientos básicos de estadística, si seguís alguna carrera donde esta parte de la matemática se transforma en herramienta vital, trabajarás y ahondarás en otros aspectos vinculados con el tratamiento de datos. Sin embargo, al ser muchos de nosotros ciudadanos que utilizamos la matemática en sus aspectos más elementales, nos interesó brindar herramientas mínimas e indispensables para generar una mirada crítica que te permita ir más allá de los datos estadísticos que se nos presentan cotidianamente en nuestras vidas.

CAPÍTULO 6

¡Cuánta información! ¿Cómo la analizamos?

El poder de lo simbólico

Rosa Ferragina – Leonardo Lupinacci

6.1. Introducción

En la historia de la matemática puede considerarse al siglo XIX como la Edad de Oro de la Matemática porque los progresos, en cantidad y calidad, que realizó esta ciencia en esos 100 años superaron en mucho a toda la producción reunida de épocas anteriores.

En este capítulo, nos centraremos en los avances realizados respecto del álgebra, y más precisamente respecto de las diferentes álgebras, según se estudien solo números (reales, complejos) o estructuras o colecciones de números, analizando qué propiedades tienen las operaciones que se pueden realizar con estos objetos matemáticos. Por eso, durante este siglo surgen conceptos que estructuran a este tipo de álgebras, como ser: grupo, anillo, ideal, cuerpo, etc.

También surgieron las nociones de determinante y matriz, consideradas como innovaciones en el lenguaje matemático, y que luego se revelaron muy útiles no solo para el desarrollo de la propia matemática, sino como instrumentos de cálculo que actualmente están presentes en las tecnologías que se aplican en la matemática actual.

6.2. ¿Qué es una matriz?

Kasner y Neuman (1985) dicen que la matemática es una ciencia que no usa nombres largos y difíciles, como ocurre en biología o química, y que además la matemática usa palabras fáciles para expresar ideas fuertes. Es el caso de palabras como *grupo*, *anillo*, *curva*, *límite*, *función* y *matriz*, entre otros. La matemática utiliza estas palabras comunes con un sentido muy particular dentro de esta ciencia y, debido a esto, surgen ambigüedades de interpretación según contexto de uso.

Por ejemplo, la palabra **matriz** tiene acepciones diferentes según se la emplee en biología, geografía, geología, informática[1] o matemática. Para esta última ciencia, una *matriz* es una tabla o cuadro de doble entrada, que agrupa una cantidad de datos o información que tienen una relación entre sí, como los ejemplos que se muestran a continuación.

Provincia	Tasa de mortalidad de 1 a 4 años	
	2003	2007
Ciudad de Buenos Aires	0,5	0,4
Buenos Aires	0,5	0,5
Chaco	1,7	1,0
Entre Rios	0,5	0,6
Formosa	1,8	1,5
Jujuy	0,9	0,6
Misiones	1,1	0,7
Neuquén	0,7	0,4
Rio Negro	0,5	0,6
San Juan	1,0	0,7

Fuente: Ministerio de Salud de la Nación

Posiciones

Equipo	Pts.	J	G	E	P	Gf.	Gc.
San Lorenzo	31	17	9	4	4	29	17
Vélez	30	18	8	6	4	24	16
Newell's	30	18	8	6	4	25	19
Lanús	29	17	8	5	4	28	14
Arsenal	29	18	7	8	3	21	18
Boca	27	17	8	3	6	22	21
Estudiantes	26	17	6	8	3	16	12
Belgrano (Cba.)	26	18	7	5	6	27	20
Argentinos Jrs.	25	17	7	4	6	16	16
Atlético de Rafaela (2)	25	17	7	4	6	23	24
Godoy Cruz	24	18	6	6	6	17	15
R.Central	23	18	6	5	7	20	23
Gimnasia (LP)	22	17	5	7	5	17	21
14 All Boys	22	18	5	7	6	19	18
15 Tigre	22	18	6	4	8	18	21
16 Quilmes	20	17	5	5	7	11	19
17 Olimpo (BB)	20	18	5	5	8	18	25
18 River	17	17	4	5	8	10	13
19 Racing	13	18	3	4	11	10	24
20 Colón (1) (2)	6	17	3	3	11	8	23

(1) Por decisión de la FIFA se le descontaron seis puntos.
(2) Suspendido a resolución de la AFA.

Fuente: Diario Página 12, 17/12/2010

Datos provisionales

Jurisdicción	Densidad de Población (habitantes por Km2)	
	Censo 2010	Censo 2001
Total del País	**14,4**	**13,0**
Ciudad Autónoma de Buenos Aires	14.185,9	13.679,6
Tucumán	64,3	59,4
Buenos Aires	50,7	45,0
24 partidos del Gran Buenos Aires	2.730,1	2.394,4
Resto de la provincia de Buenos Aires	18,7	16,9
Misiones	36,8	32,4
Santa Fe	24,1	22,6
Córdoba	20,0	18,6
Entre Ríos	15,7	14,7
Jujuy	12,6	11,5
Mendoza	11,7	10,6
Corrientes	11,3	10,6
Chaco	10,6	9,9
Salta	7,8	6,9
San Juan	7,6	6,9
Formosa	7,3	6,8
Santiago del Estero	6,6	5,9
Tierra del Fuego, Antártida Argentina e Islas del Atlántico Sur	5,8	4,7
Neuquén	5,8	5,0
San Luis	5,6	4,8
La Rioja	3,7	3,2
Catamarca	3,6	3,3
Río Negro	3,1	2,7
Chubut	2,3	1,8
La Pampa	2,2	2,1
Santa Cruz	1,1	0,8

Fuente: Diario Clarín, 1/12/2013

Inmuebles

	TIPO	CAP/GBA LUNES A JUEVES	VIERNES Y SÁBADOS	DOMINGO
Rubros 1 al 3, 6 y 8 al 13	Línea	$ 77,69	$ 100,20	$ 111,66
Rubros 1 al 3, 6 y 8 al 13	Módulo	$ 412,28	$ 531,96	$ 559,42
Rubros 4, 5 y 7	Línea	$ 77,69	$ 100,20	$ 109,56
Rubros 4, 5 y 7	Módulo	$ 412,28	$ 531,96	$ 549,10
Rubros 14	Línea	$ 56,28	$ 66,10	$ 73,65
Rubros 14	Módulo	$ 412,39	$ 432,07	$ 499,68

Fuente: Diario Clarín, 1/12/2013

1. En biología, la *matriz* o *útero* es el órgano de gestación del aparato reproductor femenino. En geografía, *Matriz* es una ciudad de Portugal. En geología, la *matriz* es el material intersticial o que rodea a otras partículas. En informática, la *matriz* en una forma de almacenar información y que contiene elementos del mismo tipo. También se llama *matriz* al original sobre el que se sacan copias.

Es decir que para la matemática una *matriz* es una distribución de números dispuestos en forma rectangular, alineados en **filas** (se lee información según un criterio) y **columnas** (se lee información según otro criterio o relación).

Por ejemplo, es posible armar una matriz con algunos de los datos brindados en los precios de avisos clasificados de inmuebles:

$$C = \begin{array}{cc} & \text{Días} \\ \text{Rubros} & \begin{pmatrix} 100{,}20 & 111{,}66 \\ 100{,}20 & 109{,}55 \\ 66{,}10 & 73{,}65 \end{pmatrix} \end{array}$$

¿Qué criterio se seleccionó para la información de las filas en los rubros? ¿Y para las columnas de los días?

Cuando una matriz tiene **m** filas y **n** columnas, decimos que su **dimensión es m x n.**

Así la matriz C de los clasificados, tiene dimensión **3 x 2**. Simbólicamente: C_{3x2} ó $C_{3,2}$

Para poder hacer referencia a elementos de una matriz debemos indicar en qué fila y columna se encuentra. Por ejemplo, para la matriz C, al elemento ubicado en la fila 1 y columna 2 podemos simbolizarlo: c_{12} = 111,66

¿Qué elementos son c_{22} y c_{32}? ¿Qué posición tiene el elemento 66,10?

Para tener en cuenta:

Las matrices se simbolizan con letras mayúsculas; $\mathbf{C}_{\mathbf{m,n}}$: matriz **C** de **m** filas y **n** columnas, y a sus elementos con letras minúsculas, $\mathbf{c}_{\mathbf{ij}}$: elemento de la matriz **C** ubicado en la fila **i** y columna **j**.

Si una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas se llama *cuadrada* (m = n) y **n** es el *orden* de esa matriz.

En cada problema es importante que analices la información: qué se lee por fila y qué por columna.

P1. a) Formá una matriz con los datos del Ministerio de Salud, que tenga como dimensión 4 x 2. Indicá qué criterio de información has colocado por fila y cuál por columna.

b) Formá una matriz con la tabla de posiciones de modo que tenga 5 filas y 4 columnas. Indicá qué criterio de información has seleccionado.

c) Formá una matriz con la tabla de posiciones que sea cuadrada con 3 filas. Indicá qué criterio de información has seleccionado.

d) Formá una matriz con los datos de la densidad de población, que tenga una dimensión 5 x 2. Indicá qué criterio de información has seleccionado.

P2. Una fábrica de juntas para motores de autos produce juntas para dos modelos de autos diferentes: A y B. La producción semanal es de 500 juntas para tapa de cilindro, 600 juntas para carburador y 350 juntas para cárter del modelo A, y 450, 700 y 300 del modelo B, respectivamente. Cada junta de tapa de cilindro insume 15 minutos de moldeado y 2 minutos de cortado. Las juntas para carburador suponen 10 minutos de moldeado y 2 de cortado. Las juntas de cárter insumen 20 minutos y 5 minutos, respectivamente.

Elaborá dos matrices que contengan la información dada. Indicá qué criterio de información has ubicado por fila y por columna.

P3. La siguiente tabla indica los datos de población estudiantil de las Universidades Nacionales durante el año 2011.

Universidad Nacional	Total de alumnos	Nuevos inscriptos	Egresados
Arturo Jauretche	3.049	3.049	0
Avellaneda	661	641	0
Buenos Aires	351.200	56.908	18.124
Catamarca	13.176	3.884	377
Centro de la PBA	13.875	2.727	823

Chaco Austral	2.639	1.110	7
Chilecito	5.090	892	60
Comahue	29.065	8.460	1.054
Córdoba	107.364	21.311	6.513
Cuyo	31.397	6.688	2.348
Entre Ríos	12.495	2.752	762
Formosa	11.334	3.873	393
Gral. Sarmiento	5.978	1.258	274
Jujuy	13.391	3.717	252
La Matanza	34.634	5.668	1.838
La Pampa	8.888	2.112	380
La Plata	108.934	19.393	5.870
La Rioja	30.329	5.083	905
Lanús	11.428	2.546	532
Litoral	42.000	9.532	1.833
Lomas de Zamora	35.024	7.366	2.711
Luján	17.073	3.975	937
Mar del Plata	23.454	4.969	1.332
Misiones	23.240	5.481	688
Moreno	1.007	1.007	0
Nordeste	49.690	10.525	2.919
Noroeste de la PBA	5.799	1.533	102
Patagonia Austral	9.011	4.949	103
Patagonia S.J. Bosco	13.171	3.418	422
Quilmes	16.625	4.300	612
Río Cuarto	15.299	2.922	853
Río Negro	4.602	2.652	21
Rosario	72.854	14.651	6.052
Salta	26.490	5.793	733
San Juan	17.989	4.024	545
San Luis	13.385	3.688	601
San Martín	12.587	3.661	762
Santiago del Estero	15.727	3.832	733
Sur	19.963	4.271	1.113
Tecnológica Nacional	82.416	18.436	4.590
Tres de Febrero	11.458	5.533	251
Tucumán	61.816	12.279	1.791
Villa María	5.042	1.793	182

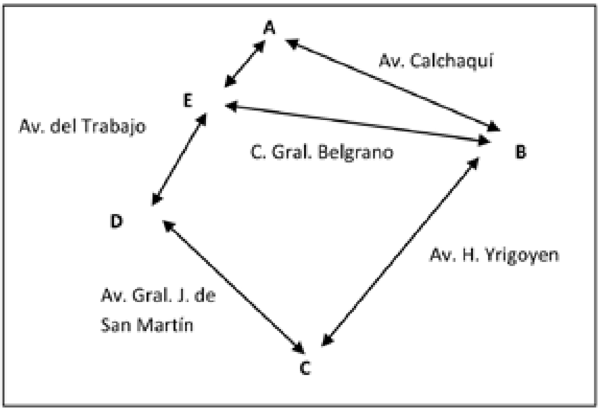
Población estudiantil de las Universidades Nacionales 2011.
Fuente: Departamento de Información Universitaria – SPU

a) Con los datos de la tabla, formá una matriz de dimensión 5 x 2. Indicá qué informaciones has colocado por fila y por columna.

b) Elaborá una matriz con los datos de las Universidades Nacionales que comenzaron su actividad académica en el año 2011. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones?, ¿por qué?

c) Elaborá una matriz de 2 x 3 con los datos totales de las universidades nacionales de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires (Universidad de Buenos Aires y Universidad Tecnológica) y de la provincia de Buenos Aires. Indicá qué procedimientos son necesarios para elaborar dicha matriz.

P4. Una empresa de transportes debe realizar algunas entregas en los puntos A, B, C, D y E de Florencio Varela. Por cuestiones operativas, el vehículo que realizará las entregas solo puede desplazarse por Av. Calchaquí, Av. Del Trabajo, Av. Gral. José de San Martín, Av. Hipólito Yrigoyen y Camino General Belgrano. El gráfico a continuación establece los posibles recorridos:



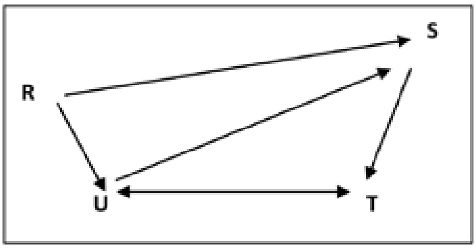
Podemos representar las informaciones de este recorrido mediante una matriz, utilizando como elementos los valores 0 y 1. El 1 en el caso de que haya posibilidades de ir de un punto i (fila) a otro j (columna) y el cero en los casos que no existe esa posibilidad:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ R = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \end{array}$$

a) Completá la matriz del recorrido.

b) ¿Cuál sería el recorrido óptimo para realizar por la empresa de transporte? ¿Qué información tomaste en cuenta para la respuesta anterior? ¿Qué otras informaciones no presentes en el gráfico y en la matriz serían necesarias para establecer la elección?

P5. Otra empresa de transportes ofrece los siguientes recorridos para unir distintos puntos de entrega:



a) ¿Qué diferencias hay entre este esquema y el anterior?

b) Escribí la matriz del recorrido.

P6. Los esquemas de los problemas anteriores reciben el nombre de *grafos*. Se trata de conjuntos de puntos (llamados *vértices*) vinculados por un conjunto de lados, de tal manera que cada lado tiene su origen y su final en un vértice. Las matrices que hemos utilizado para representarlos numéricamente reciben el nombre de *matrices de adyacencia*, ya que indican si los vértices correspondientes a la fila y columna de cada elemento de la matriz, están o no unidos por un lado.

Las siguientes son dos matrices de adyacencia.

$$A = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Elaborá en cada caso el grafo que representan.

b) ¿Qué particularidad posee el vértice "d" del grafo A? ¿Cómo se puede representar gráficamente esa particularidad?

6.3. Operaciones con los elementos de las matrices

Presentaremos cómo se realizan estas operaciones básicas y qué significan, mediante el siguiente problema introductorio.

P1. Una concesionaria oficial de autos arma informaciones mensuales con la cantidad de autos vendida sobre el último modelo de auto fabricado en sus diferentes versiones (básico, full y súper) y colores (blanco, negro, rojo, verde). Las informaciones de los meses de enero y febrero se organizaron en forma matricial del siguiente modo:

$$E = \begin{pmatrix} 100 & 110 & 130 & 90 \\ 60 & 50 & 40 & 70 \\ 40 & 60 & 50 & 70 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 90 & 110 & 100 & 65 \\ 60 & 50 & 80 & 40 \\ 40 & 70 & 40 & 30 \end{pmatrix}$$

a) Indicá qué información se ha ubicado en las filas y en las columnas de cada matriz de venta.

b) Escribí mediante una matriz las ventas totales de los dos meses de esa concesionaria y para ese modelo de auto. ¿Qué operación realizás? Simbolizala.

c) Mostrá mediante una matriz la diferencia de ventas que presenta el mes de enero con respecto febrero. ¿Qué operación realizás? Simbolizala.

¿Qué significa que esta matriz tenga, como elementos, números positivos, negativos o cero?

d) Por indicadores de años anteriores, se prevé para el mes de abril un incremento en las ventas en un 35%, ¿qué matriz representaría las ventas esperadas para ese mes? ¿Qué operación realizás? Simbolizala.

e) Escribí mediante un texto o una simbolización cómo es posible realizar las operaciones de adición y sustracción entre dos o más matrices y cómo, la multiplicación de una matriz por un número.

P7. Las siguientes tablas muestran los datos estadísticos del grupo 4 de la Copa Libertadores de América (Torneo de fútbol sudamericano) del año 2013. En la primera fase del campeonato, cada equipo juega dos veces contra cada uno de sus rivales de grupo. Las tablas indican las estadísticas de la primera y la segunda tanda de partidos respectivamente.

Equipo	Puntos	Partidos ganados	Partidos empatados	Partidos perdidos	Diferencia de gol
Vélez Sarsfield	6	2	0	1	3
Emelec	3	1	0	2	-2
Peñarol	6	2	0	1	1
Iquique	3	1	0	2	-2

Equipo	Puntos	Partidos ganados	Partidos empatados	Partidos perdidos	Diferencia de gol
Vélez Sarsfield	7	2	1	0	4
Emelec	7	2	1	0	3
Peñarol	3	1	0	2	-1
Iquique	0	0	0	3	-6

a) Escribí la matriz de las estadísticas de cada una de las rondas de partidos.

b) Escribí, mediante una única matriz, las estadísticas finales luego de todos los partidos del grupo 4. ¿Qué operación debés realizar?

c) Sabiendo que los dos equipos de mayor puntaje son los que clasifican a la ronda siguiente de la copa (en caso de empate en puntos clasifica el de mayor diferencia de gol), indicá cuáles son esos equipos.

P8. Las matrices R y S representan las estadísticas finales de la Copa Libertadores de América 2013, para los grupos 1 y 2, respectivamente. En R se muestran las estadísticas de los equipos Nacional, Boca Jrs., Toluca y Barcelona, en ese orden. En S, Palmeiras, Tigre, Libertad y Sporting Cristal. Al igual que en el problema anterior, los datos numéricos por columna se corresponden con los puntos, partidos ganados, empatados, perdidos y diferencia de gol en ese orden:

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué representa el valor $r_{2,1}$? ¿Y $r_{3,4}$?

b) ¿Qué elemento de S indica la cantidad de partidos empatados por Tigre?

c) Realizá la suma entre R y S. ¿Qué significado tiene esa suma para la situación? ¿Por qué?

P9. Una empresa de televisores de la provincia de Tierra del Fuego posee dos plantas: A y B. En ellas ensamblan televisores FLAT, LCD y LED en 3 tamaños diferentes: 21 pulgadas, 24 pulgadas y 32 pulgadas. La producción anual de cada planta, en miles de televisores, se indica en las siguientes tablas:

Producción PLANTA A	FLAT	LCD	LED
21”	5	8	8
24”	8	10	12
32”	3	8	9

Producción PLANTA B	FLAT	LCD	LED
21”	3	5	6
24”	5	8	10
32”	2	4	6

a) Escribí la matriz de la producción anual de cada una de las plantas.

b) Escribí, mediante una matriz, las ventas totales de la empresa de televisores. ¿Qué procedimiento debes realizar?

c) ¿Cuál es la diferencia entre la producción de la Planta A con respecto a la Planta B? Representala mediante una matriz.

d) Por reestructuración de la empresa, al año siguiente la Planta A produjo el doble de televisores de cada uno de los modelos y tamaños, mientras que la Planta B, bajó un 20% la producción. Escribí las matrices que simbolicen esas variaciones.

P10. En los siguientes ítems se han establecido igualdades realizando operaciones entre matrices. Algunos elementos son desconocidos. Calculalos, de modo tal que siga manteniendo la igualdad y verificá resultados.

a) $\begin{pmatrix} x & -5 & 2 \\ 3 & y & -8 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 3y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -11 & 4 \\ 19 & 9 & -6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 3 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 3-z & z-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 4 \\ 2 & y-3 \end{pmatrix}$

P11. Dos matrices con nombre propio.

Matriz nula: cualquiera sea su dimensión, es una matriz en la que todos los elementos que figuran en ella son ceros.

Matriz unidad: es una matriz cuadrada, en la que sus elementos cumplen las siguientes condiciones:

$$a_{ij} = 1 \;,\quad \text{si} \quad i = j \;\; ; \; a_{ij} = 0 \;,\quad \text{si} \quad i \neq j$$

Dadas las matrices $D = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$,

encuentra una operación entre dos de ellas para que resulte:

- una matriz nula y simboliza la operación;
- una matriz unidad y simboliza la operación.

6.4. Multiplicación entre matrices. Cómo y cuándo

Como en el apartado anterior, realizaremos esta nueva operación entre matrices mediante un problema introductorio que condicionará el modo de realizar la operación así como sus condiciones.

P1. Una ONG ha realizado dos envíos a dos zonas de la Argentina que fueron afectadas por las inundaciones del 2 de abril de 2013. Se han categorizado los envíos en ropa, medicinas y alimentos no perecederos, se registró su peso en toneladas y, se estimó el valor en pesos de cada tonelada enviada. La matriz A muestra lo enviado en toneladas y la B, el valor de cada envío:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{Ropa} & \text{Medic.} & \text{Alim.} \end{array} \\ \begin{array}{c} Z1 \\ Z2 \end{array} & \begin{pmatrix} 220 & 12 & 680 \\ 180 & 40 & 450 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Envío I} & \text{Envío II} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Ropa} \\ \text{Medic} \\ \text{Alim.} \end{array} & \begin{pmatrix} 1600 & 1680 \\ 400000 & 434000 \\ 880 & 960 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) ¿Es posible calcular A + B?, ¿por qué? (Hay dos justificaciones diferentes).

b) ¿Cómo calcularías el valor estimado que recibió la zona 1 en el primer envío? Realizalo.

c) Es posible realizar el cálculo anterior respetando que la información requerida pertenece a los elementos de dos matrices. De este modo surge la multiplicación entre matrices. Lo escribimos:

$$\underset{\text{Matriz fila de } 1,3}{\begin{pmatrix} 220 & 12 & 680 \end{pmatrix}} \underset{\text{Matriz columna de } 3,1}{\begin{pmatrix} 1600 \\ 400000 \\ 880 \end{pmatrix}} = \underset{\text{Matriz de valor recibido } 1,1}{\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}}$$

Es decir que la multiplicación entre matrices surge de realizar esta suma de productos correspondientes entre una matriz fila y una matriz columna, que comparten una dimensión.

d) Realizá e indicá qué significa para el problema la multiplicación:

$$\begin{pmatrix} 220 & 12 & 680 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1680 \\ 434000 \\ 960 \end{pmatrix}$$

e) ¿Qué significa para el problema la siguiente multiplicación?

¿Cómo lo realizarías? Resolvelo.

$$\begin{pmatrix} 220 & 12 & 680 \\ 180 & 40 & 450 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1680 \\ 434000 \\ 960 \end{pmatrix}$$

f) En las multiplicaciones de los ítems anteriores, hemos calculado algunos de los valores recibidos por cada zona. Si queremos calcular el valor recibido por cada zona en cada envío, **debemos multiplicar cada fila de la matriz A por cada columna de la matriz B**.

$$R = \begin{pmatrix} 220 & 12 & 680 \\ 180 & 40 & 450 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1600 & 1680 \\ 400000 & 434000 \\ 880 & 960 \end{pmatrix} \quad , \quad R =$$

¿Qué dimensión tiene la matriz R? ¿Por qué? ¿Qué información se lee por fila y por columna?

¿Qué significado tiene el elemento r_{22} para el problema?

Para tener en cuenta:

> Solo se pueden multiplicar dos matrices cualesquiera A y B, en ese orden, si el número de columnas de la primera (A) coincide con el número de filas de la segunda (B).
>
> Simbólicamente: $A_{m,n} \cdot B_{n,p} = R_{m,p}$, tal que un elemento r_{ij} de la matriz resultado surge como la suma de la multiplicación de cada elemento de la fila i de A por el correspondiente de la columna j de B.

P12. Las unidades mensuales vendidas de agua, jugo y gaseosa de las tres sucursales de un restaurante (S1, S2 y S3) son expresadas en la matriz V. Los precios de venta de dichos productos, expresados en pesos, se indican en la matriz P.

$$V = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & J & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 450 & 600 & 520 \\ 300 & 210 & 350 \\ 400 & 580 & 600 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ S1 \\ S2 \\ S3 \end{array} \qquad P = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ J \\ G \end{array}$$

a) Calculá V.P.

b) Interpretá qué información provee la multiplicación de las matrices.

P13. Para un estudio acerca de los hábitos alimenticios, se seleccionó una muestra estadística compuesta de mujeres y hombres, tanto adultos (A) como niños (N). La cantidad de los participantes del estudio, diferenciados por sexo y categoría, se muestran en la matriz S.

$$S = \begin{array}{cc} \begin{matrix} A & N \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 150 & 200 \\ 100 & 150 \end{pmatrix} & \begin{matrix} Mujeres \\ Hombres \end{matrix} \end{array}$$

A partir del estudio, se establecieron los valores medios, en gramos, de carbohidratos (C), grasas (G) y proteínas (P) que consume diariamente cada adulto y niño. Los valores correspondientes se indican en la matriz B.

$$B = \begin{array}{cc} \begin{matrix} C & G & P \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A \\ N \end{matrix} \end{array}$$

a) ¿Cuántos gramos de proteínas ingieren diariamente el total de los hombres del estudio?

b) ¿Cuántos gramos de grasa consumen diariamente todas las mujeres?

P14. Una casa de comidas elabora tartas de jamón y queso (J) y de verdura (V), ambas en tres tamaños distintos: pequeño (P), mediano (M) y grande (G). La matriz A indica el precio de venta de cada una de estas tartas; la matriz B indica la cantidad de unidades que se producen diariamente de cada una.

$$A = \begin{array}{cc} \begin{matrix} P & M & G \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 8 & 12 & 16 \\ 7 & 12 & 15 \end{pmatrix} & \begin{matrix} J \\ V \end{matrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \begin{matrix} J & V \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{pmatrix} & \begin{matrix} P \\ M \\ G \end{matrix} \end{array}$$

a) ¿Podés realizar la A.B y también la B.A?, ¿por qué? Calculá ambas multiplicaciones y analizá por qué no has obtenido el mismo resultado.

b) ¿Cuál de las multiplicaciones anteriores tiene sentido para la situación? ¿Por qué?

P15. En el problema 2, se elaboraron dos matrices que contenían la información brindada. A partir de esas matrices, calculá los minutos totales que son necesarios para el moldeado y el cortado de cada uno de los modelos.

P16. Una industria textil fabrica 3 tipos de telas: A, B y C. Estas telas requieren para la elaboración de cada rollo, las cantidades en kilogramos de algodón, nailon y poliéster que se indican en la siguiente tabla:

	A	B	C
Algodón	4	5	6
Nailon	3	5	2
Poliéster	1	1	4

Para un pedido en particular se deben fabricar 4 rollos de tela A, 6 rollos de tela B y 2 rollos de tela C.

a) Representá, en dos matrices, la cantidad de materia prima necesaria para cada rollo de tela y la cantidad de rollos necesaria para cubrir el pedido.

b) Encontrá la matriz que indica las cantidades totales de algodón, nailon y poliéster necesarias para realizar el pedido.

P17. Una multiplicación con resultado particular.

Dada una matriz cuadrada de orden 2, la vamos a multiplicar por otra matriz del mismo orden, sabiendo ya el resultado que queremos obtener.

a) Por ejemplo, a la matriz A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, la multiplicamos por otra B, para que el resultado sea la matriz **unidad:** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es decir, formaremos la igualdad A.B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Como B no es una matriz conocida, escribimos el producto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolvé el producto indicado y mediante la igualdad, encontrá los valores de a, b, c y d.

La matriz B que se ha calculado se llama *inversa de A*. La inversa de una matriz, si existe, es aquella que, multiplicándola por la matriz original, da por resultado la matriz unidad.

b) Encontrá, si es posible, las inversas de las siguientes matrices de orden 2: $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

c) Analizá en qué casos es posible encontrar la inversa de una matriz cuadrada. Justificá el porqué.

P18. Otra aplicación de la multiplicación de matrices.

a) Históricamente han existido diversos sistemas para codificar o cifrar mensajes con el objetivo de hacerlos ininteligibles a lectores no deseados. Hoy en día, en la era de la informática y las comunicaciones digitales, se ha ampliado la utilización de estas técnicas en función de aumentar la seguridad de las transmisiones de datos y lograr que potenciales "intrusos" que intercepten las comunicaciones, no sean capaces de descifrarlas. La criptografía es la ciencia que se ocupa del estudio y el desarrollo de técnicas de codificación de los mensajes lingüísticos; es una parte de la criptología, que se encarga del estudio y elaboración de algoritmos matemáticos y protocolos orientados a proteger todo tipo de información.

Una de las técnicas empleadas en esta codificación se basa en la multiplicación de matrices:

En primer lugar, el mensaje para transmitir o almacenar debe ser transformado en caracteres numéricos para poder operar con ellos, para lo que se suele emplear el orden de las letras en el alfabeto.

Por ejemplo, para codificar el mensaje "BUEN DÍA", puede utilizarse una tabla como la siguiente:

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
1	2	3	4	5	6	7
H	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
8	9	10	11	12	13	14
Ñ	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**
15	16	17	18	19	20	21
U	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**	**espacio**
22	23	24	25	26	27	28

El mensaje queda transformado en el siguiente:

B	U	E	N		D	I	A
2	22	5	14	28	4	9	1

Desde ya que si alguien interceptara este mensaje numérico, podría recomponerlo fácilmente a partir de la ubicación de cada letra en el alfabeto. Es por eso que se requiere de una codificación más profunda. Y es aquí donde entra en juego el trabajo con matrices:

Para este caso se debe seleccionar una matriz cuadrada de cualquier dimensión, la cual denominaremos *matriz clave* (**C**). Dicha matriz puede ser cualquiera, y debe ser conocida únicamente por el emisor y por el receptor del mensaje.

En nuestro ejemplo, tomaremos la matriz clave:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como los valores numéricos a transmitir para el mensaje "BUEN DÍA" son 2, 22, 5, 14, 28, 4, 9 y 1, los agrupamos en columnas de la misma cantidad de elementos que la dimensión de la matriz clave para obtener la *matriz mensaje* (**M**):

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 28 & 9 \\ 22 & 14 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

• ¿Por qué la cantidad de elementos de cada columna de M debe ser igual a la dimensión de la matriz C?

• ¿Qué ocurriría si al armar la matriz M nos "faltan" elementos?

Ahora, multiplicando C . M tenemos el mensaje codificado:

$$C.M = \begin{pmatrix} 46 & 33 & 36 & 11 \\ 68 & 47 & 40 & 12 \end{pmatrix}$$

Ese es el mensaje que se transmite o se almacena, el cual está cifrado y resulta imposible de conocer si no se dispone de la matriz clave con la que se cifró:

46, 68, 33, 47, 36, 40, 11, 12

Puede observarse que ya no hay una correspondencia directa entre los números del mensaje codificado y la posición que ocupan las letras originales en el alfabeto, lo que imposibilita descifrar el mensaje si se desconoce la matriz con la cual se codificó.

Ahora bien, ¿cómo decodifica el receptor el mensaje recibido? Es posible hacerlo a partir de la matriz clave, que en teoría solo conocen el emisor y el receptor. El receptor conoce la matriz C y el resultado de C.M; para conocer el mensaje, debe encontrar la matriz M. Si planteamos el producto C^{-1}.C.M, como C^{-1}.C da por resultado la matriz unidad, sólo queda M.

Entonces, para obtener el mensaje original, se multiplican los números del mensaje codificado (matriz **C.M**) por la matriz inversa de C:

$$C^{-1}.C.M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 46 & 33 & 36 & 11 \\ 68 & 47 & 40 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 28 & 9 \\ 22 & 14 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado puede ubicarse longitudinalmente de la forma **2, 22, 5, 14, 28, 4, 9, 1**, y así rearmar nuevamente la frase BUEN DÍA a partir de la posición de cada letra en el abecedario.

b) Se quiere codificar y enviar la frase “ES UN DÍA SOLEADO” utilizando la matriz clave:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b_1) ¿Cuál sería el mensaje cifrado a enviar?

b_2) Corroborá el mensaje obtenido descifrándolo a partir de la matriz inversa.

c) Se recibe un mensaje codificado CM: **32, 56, 25, 38, 57, 86, 35, 57, 30, 53**.

Se sabe que el mensaje fue codificado con una matriz clave: $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es el mensaje enviado?

d) Elaboren un mensaje y codifíquenlo usando cualquier matriz cuadrada de orden dos. Intercambien con sus compañeros el mensaje codificado y la matriz clave para que ellos puedan descifrarlo.

6.5. Todas las multiplicaciones posibles. El determinante de una matriz

En el apartado anterior trabajamos sobre la multiplicación entre matrices y sus condiciones para efectuar esa operación entre ellas. Ahora, analizaremos cómo asociar a una matriz cuadrada solo un número. Este número se formará mediante la suma de todas las multiplicaciones que se forman entre sus elementos de modo que estos no estén ubicados en la misma fila ni la misma columna.

Veamos un ejemplo. En la matriz $D = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ podemos formar sólo dos multiplicaciones. Si seleccionamos el elemento -7, lo tendremos que multiplicar por el elemento 3 porque no está en la misma fila y columna de -7. Si seleccionamos a 8, solo lo podremos multiplicar por 4. Las multiplicaciones formadas son: -7.3 y 8.4. Ahora, cómo obtenemos un único resultado. Mediante "una suma", dijimos, pero esta suma tiene asociada un signo para cada producto que se forma. Para el ejemplo: **+**

(-7.3) **–** (8.4), el resultado es -53. Este número asociado a la matriz D se llama **determinante**[2] de esa matriz.

En símbolos, $\det(D)=\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=+(-7.3)-(8.4)=-53$

Aún no hemos explicado por qué esas multiplicaciones tienen esos signos. Para ello utilizaremos una matriz genérica de D, de orden dos.

Para esta matriz, $D=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$ las únicas multiplicaciones que se pueden formar son: $d_{11}.d_{22}$ y $d_{12}.d_{21}$. Podemos observar que los subíndices de las filas están ordenados (primero la fila uno y luego la dos), los subíndices de las columnas están ordenados en el primer producto y no en el segundo (hay que realizar una rotación entre ellos para ordenarlos). Por eso es que el primer producto tiene signo positivo, y el segundo, negativo. Es decir que si formamos los productos posibles, estando ordenados los subíndices de las filas, el signo de cada producto se determina por la cantidad de rotaciones que debemos realizar a los subíndices de las columnas para que queden ordenados. Si la cantidad de rotaciones es un número impar, el signo del producto es negativo; caso contrario será positivo.

P19. Probá que si los subíndices de las filas no están ordenados, el signo del producto que es posible formar es el mismo que si lo estuvieran y, por lo tanto, el determinante dará el mismo resultado.

P20. ¿Cómo formamos las multiplicaciones del determinante de una matriz de orden 3?

Trabajaremos sobre una matriz genérica $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

2. Una palabra más que la matemática utiliza con significado diferente de aquel con que se la conoce en otro contexto. Más adelante hablaremos de la relación entre los términos "matriz" y "determinante".

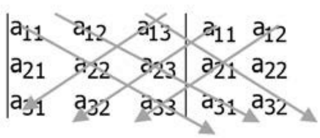
a) Aquí, las multiplicaciones que se pueden formar tendrán 3 factores cada uno. El producto que mejor se visualiza es el formado por: $a_{11}.a_{22}.a_{33}$, los elementos de la diagonal principal que, por tanto están ubicados en diferentes filas y columnas. ¿Qué signo tiene ese producto?, ¿por qué?

b) Hay otra multiplicación posible que se puede formar con el elemento a_{11}, cuando se lo combina con los elementos a_{23} y a_{32}. Queda el producto: $a_{11}.a_{23}.a_{32}$, ¿qué signo tiene?, ¿por qué?

c) ¿Cuántas multiplicaciones se pueden formar con el elemento a_{12}? Escribí los productos correspondientes y analizá el signo.

d) ¿Cuántas multiplicaciones se pueden formar con el elemento a_{13}? Escribí los productos correspondientes y analizá el signo.

e) ¿Formaste seis multiplicaciones? ¿Resultó complicado analizar cómo se forman las multiplicaciones? Podemos utilizar una “disposición visual” que nos dé mayor seguridad en la formación de las multiplicaciones:



Escribimos a continuación las dos primeras columnas, se visualizan las seis multiplicaciones que se pueden formar. El signo del producto formado por los elementos ubicados sobre las flechas hacia la derecha es positivo. Los que están sobre las flechas hacia la izquierda tendrán signo negativo. Verificá esto con lo realizado en los ítems anteriores.

Para tener en cuenta:

A cada matriz cuadrada A, de orden **n**, puede asociársele un único número, que se llama *determinante* de A (det(A)).

Este número surge como la suma de las posibles multiplicaciones de **n** factores, de modo que cada factor sea un elemento de A y no estén ubicados en la misma fila y columna.

Cada producto tiene su signo que surge de la cantidad de rotaciones que tienen sus elementos por fila o columna, para que queden ordenados.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}a_{33} + a_{12}\, a_{23}a_{31} + a_{13}\, a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}\, a_{22}a_{31} - a_{12}\, a_{21}a_{33} - a_{11}\, a_{23}a_{32}$$

P21. a) Calculá los determinantes asociados a cada una de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 5 \\ -2 & 7 & -0{,}5 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & -1 \\ 5 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Observá la conformación de las filas o columnas de las tres últimas matrices. Extraé conclusiones, relacionando esos elementos con el resultado obtenido en sus respectivos determinantes.

P22. Matrices a pedido.

a) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ \dots & \dots. & \dots \end{pmatrix}$, completaremos su tercera fila realizando una combinación entre las dos primeras. Por ejemplo: multiplicaremos por 2 cada elemento de la primera fila y al resultado le restaremos los elementos de la segunda fila, respectivamente.

En símbolos 2: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

Ahora, calculá el determinante asociado a la matriz recién formada.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Si proponés otra combinación distinta entre las dos primeras filas de M, para obtener la tercera, ¿qué resultado tendrá su determinante? Esbozá una conjetura y comprobala.

c) ¿Existen más combinaciones posibles para llegar al mismo resultado en el determinante de M? ¿Por qué?

d) Completá la segunda columna de la siguiente matriz para que su determinante sea cero.

$$N = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 2 \\ 4 & \dots & 1 \\ 3 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

La combinación que propusiste es única, ¿por qué?

e) Completá la matriz $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ \dots & \dots. \end{pmatrix}$ de orden dos, para que su determinante sea cero. ¿La respuesta es única?, ¿por qué?

f) Escribí en un texto, las condiciones que deben tener las matrices cuadradas para que su determinante sea cero.

P23. El poder de lo simbólico.

Analizá la siguiente secuencia de igualdades:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \ ; \ -2y - 3x = 0 \ ; -2y = 3x \ ; \ \frac{y}{3} = \frac{x}{-2} \ ; \ y = -\frac{3}{2}x$$

a) Escribí una frase que caracterice la condición del determinante.

b) Caracterizá la expresión simbólica de la primera igualdad -2y -3x = 0.

c) Caracterizá la expresión simbólica de la tercera igualdad $\frac{y}{3} = \frac{x}{-2}$..

d) Escribí un texto que exprese la secuencia de igualdades. Utilizá términos matemáticos específicos para cada una de las transformaciones que se han realizado.

Un poco de historia: ¿Matriz de un determinante o determinante de una matriz?

"*El estudio de los determinantes emprendido desde mediados del siglo* XVIII *proporcionó una multitud de resultados interesantes gracias a las necesidades experimentadas por los matemáticos, que buscaban medios de expresar de una manera más compacta cosas como, por ejemplo, transformaciones de coordenadas, cambios de variables, resolución de sistemas lineales, etc. Tarde o temprano, debían interesarse más específicamente por la disposición rectangular de los números que aparecen en el determinante con vistas a acotar un dominio de estudio específico. Sin embargo, mucho antes de que se desarrollara la teoría de matrices, los matemáticos habían descubierto ya un buen número de propiedades relativas a esta teoría. Una vez más, la historia de las matemáticas revela que el desarrollo de las teorías y los* *conceptos no se hace necesariamente de una manera lógica, y aunque la noción de matriz precede lógicamente a la de determinante, fue esta última la que se desarrolló primero. Como Cayley fue el primero en extraer la idea de matriz del determinante y en publicar una serie de artículos sobre esta nueva noción, es considerado generalmente como el fundador de la teoría de matrices."* (Collette, 1986: 420-421).

El matemático inglés James Joseph Sylvester (1814 – 1897) fue el primero que utilizó el término *matriz* en 1850, para distinguir a éstas de los determinantes. La intención de este matemático fue que el término *matriz* tuviera el significado de *madre de los determinantes*.

P24. A modo de cierre del capítulo

En los siguientes ítems, ¿cuáles afirmaciones son verdaderas? Justificá tu respuesta.

a) Para la matriz $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a$_1$) Es una matriz cuadrada.

a$_2$) Es una matriz de 3 x 2.

a$_3$) Puede obtenerse como suma de $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -9 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

b) Al multiplicar dos matrices A y B.

b$_1$) Solo se puede realizar la operación si A y B son cuadradas.

b$_2$) Cada elemento de la matriz resultado c_{ij} se obtiene mediante el producto a_{ij} y b_{ij}.

b$_3$) A.B = B.A

b_4) Se puede obtener el producto A.B, si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.

c) La matriz A es de 2 x 4, la B de 4 x 3, entonces el producto A.B tiene
como dimensión:

c_1) 2 x 3 **c_2)** 3 x 2 **c_3)** 4 x 4 **c_4)** Este producto no se puede calcular.

Los siguientes determinantes son nulos.

d_1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **d_2)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **d_3)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **d_4)** $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 7 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

CAPÍTULO 7

Varias ecuaciones lineales, ¿muchas soluciones?

Rosa Ferragina – Leonardo Lupinacci

7.1. Introducción

La historia de la matemática nos permite analizar cómo diversas culturas, en distintas épocas, aplicaban procedimientos matemáticos en la resolución de problemas que respetaban sus características de uso y aplicaciones específicas. Algunos de los temas que han tenido esta multiplicidad de investigaciones son: los sistemas de numeración, las operaciones, las simbolizaciones, la obtención de fórmulas, etc. Diferentes matemáticos realizaban aportes según el o los temas que investigaban. De este modo se reformulaban esos procedimientos. Podría decirse que en la actualidad se ha acordado sobre cómo realizarlos, seleccionando aquellos que permitan una generalización por su aplicación, su practicidad y que puedan incorporarse en calculadoras y computadoras.

El planteo de problemas de diversa índole llevaba a simbolizaciones en las que intervenían condiciones que debían cumplirse de un modo simultáneo. Es por eso que la resolución de sistemas lineales es uno de los temas tratado por todas las culturas matemáticas. En este capítulo analizaremos un procedimiento de resolución que tiene un recorrido matemático de casi 2300 años. ¿Qué lo distingue de otros posibles? Utiliza matrices en la simbolización que destaca su economía, realiza operaciones sencillas entre los elementos de la matriz conformada que enfatiza su practicidad, se aplica a muchos problemas que refuerzan su generalización, y se implementa en programas informáticos para incorporarlo en calculadoras y computadoras, lo cual rubrica su actualidad.

7.2. De los sistemas de ecuaciones lineales a las matrices

P1. Un método de la matemática china

El libro más importante de la matemática china es el *Zhui Zhang Suan shu* o *El arte matemático en nueve secciones*. No se conoce exactamente su autor y fecha de aparición, puesto que en el año 213 a. C. el emperador ordenó quemar todos los libros existentes, pero se supone que esta obra recopila algunos de los resultados de la antigua matemática china que datarían del 1100 a. C. Lo que ha llegado a la actualidad son copias de los originales, reproducidos de memoria (siglo II a. C.). Este libro contiene 250 problemas sobre diferentes temas (agrimensura, agricultura, cálculos de longitudes y superficies, solución de ecuaciones, propiedades de triángulos rectángulos, etc.), divididos en 9 capítulos. En el capítulo 8 del libro, "Método de las tablas", se tratan los temas referentes a sistemas de ecuaciones lineales y explicación de los conceptos de número positivo y negativo. En el primer problema de esta sección, se plantea resolver un sistema de ecuaciones lineales por un método matricial realizando operaciones entre las columnas de la matriz.

Debido a los inconvenientes mencionados sobre la conservación del material de *El arte matemático en nueve secciones*, no se cuenta con el enunciado del problema que se simboliza mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

La regla de los chinos consiste en escribir, con los datos, una matriz de la siguiente forma:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}$$

a) ¿Cómo se han acomodado los datos del sistema en la disposición matricial?

b) La primera transformación que realizan en las columnas es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$ ¿Qué operación es? Simbolizala.

c) Se transforma nuevamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$ ¿Qué operación se realiza entre las columnas? Simbolizala.

d) Una nueva transformación, ¿cuál es? Simbolizala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

e) Finalmente, se realiza una transformación entre columnas que implica una combinación entre dos de ellas, como ser: multiplicar por 5 a la primera columna (5C1), multiplicar por 4 a la segunda columna (4C2), realizar la resta (5C1 – 4C2) y colocar el resultado en C1 (5C1 – 4C2 → C1). Lo que resulta:

$$\begin{pmatrix}0&0&3\\0&5&2\\36&1&1\\99&24&39\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}$$

Entonces, de la última matriz surgen las ecuaciones simplificadas $36z = 99$; $5y + z = 24$; $3x + 2y + z = 39$, a partir de las cuales es posible determinar los valores de x, y, z. Encontralos.

f) Resumiendo.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&1&1\\26&34&39\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}1&6&3\\2&9&2\\3&3&1\\26&102&39\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}1&3&3\\2&7&2\\3&2&1\\26&63&39\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&3\\2&5&2\\3&1&1\\26&24&39\end{pmatrix}\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&3\\0&5&2\\36&1&1\\99&24&39\end{pmatrix}$$

Original	1.ª operación:	2.ª operación:	3.ª operación:	4.ª operación:
	$2C_2$	$C_2 - C_3 \rightarrow C_2$	$C_2 - C_3 \rightarrow C_2$	$5C_1 - 4C_2 \rightarrow C_1$

Este es el proceso de transformación que se ha realizado siguiendo el método chino, mediante operaciones elementales entre columnas (multiplicación de una columna por un número, suma algebraica entre columnas), con el objetivo de hacer ceros en forma escalonada y obtener expresiones reducidas.

P1. Resolvé los siguientes sistemas aplicando el método chino de reducción por columnas.

a) $\begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{l} 2x - 3y = -2 \\ 2x + y = 1 \end{array}$

Otra parte de la historia. Del método chino al método de eliminación de Gauss

Los chinos aplicaron este procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones lineales en solo algunos casos particulares, los que figuraban en *El arte matemático en nueve secciones.* Fue Isaac Newton quien presentó por primera vez el método en su formulación moderna, aunque no lo quiso publicar. Entre 1650 y 1750 hay 35 fuentes, solo en Inglaterra, en las que aparece descrito este método de resolución. La mayoría de los libros de álgebra del siglo XVIII apuntaban que el método había sido inventado por Newton (el método de Newton para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas).

Ahora bien, ¿por qué este método de resolución de sistemas por eliminación recibe actualmente el nombre de Gauss? Para Grcar (2009), todo nuevo método necesita un problema que resolver. Gauss lo utilizó en el marco del método de mínimos cuadrados, de gran utilidad en la resolución de múltiples problemas prácticos relacionados con estadística. Luego, lo sigue utilizando en muchísimos problemas, sin indicar los detalles, porque "creía" que era un método "común", aunque ampliamente conocido y aplicado por él. Por lo que, posteriormente, en muchos trabajos que hacían referencia al método decían "acorde con Gauss", puesto que no tenía nombre. Este método se conoce como "método de eliminación de Gauss" a partir de la Segunda Guerra Mundial.

P2. ¿Cuáles son las diferencias entre el método chino y el de Gauss?

Básicamente, podemos de decir que son dos. La generalización del método a cualquier tipo de sistema lineal; y que las transformaciones (operaciones elementales) y reducciones se realizan por fila, no por columna, lo que permite visualizar mejor la correspondencia entre el sistema y su representación matricial.

Mostraremos la similitud con el ejemplo desarrollado del método chino.

El sistema en su notación actual es: $\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$ y en su forma matricial:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix} \end{array}$$

Primera transformación, intercambiamos el orden de las ecuaciones. La tercera ecuación ocupará el primer lugar, porque el coeficiente de la incógnita x es 1 y facilitará las siguientes operaciones elementales:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) En la segunda transformación, se obtiene la siguiente matriz, ¿qué operación elemental entre filas se ha realizado y dónde se escribió el resultado? Simbolizala.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) En la tercera transformación, se obtiene la siguiente matriz, ¿qué operación elemental entre filas se ha realizado y dónde se escribió el resultado? Simbolizala.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \\ 0 & 1 & 5 & 18 \end{pmatrix} \end{array}$$

c) En la cuarta transformación, trabajamos con operaciones elementales entre la segunda y la tercera fila. Se obtiene la siguiente matriz. ¿Qué operación se ha realizado entre esas filas y dónde se escribió el resultado? Simbolizala.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \\ 0 & 0 & -12 & -33 \end{pmatrix} \end{array}$$

d) Nos ha quedado la matriz escalonada con ceros, que permite determinar los valores de z, y, x, respectivamente. Encontralos y verificá que son los mismos hallados con el método chino.

e) ¿Por qué ha trascendido tanto este método de eliminación en los sistemas lineales?

En primer término porque es fácil de implementar. Solo realiza operaciones de multiplicación por un número y suma algebraica entre las filas (o columnas).

Luego, porque van obteniéndose sistemas que son equivalentes al dado originalmente. Esto quiere decir que cada transformación que se hace no modifica las soluciones del sistema dado. La sucesión de sistemas que van obteniendo tienen la misma solución, es decir que son todos equivalentes. Comprobalo, con las soluciones encontradas en los respectivos sistemas que se van obteniendo:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ 4y + 8z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ 4y + 8z = 39 \\ y + 5z = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 26 \\ 4y + 8z = 39 \\ -12z = -33 \end{cases}$$

Para tener en cuenta:

- Un sistema de ecuaciones es equivalente a otro cuando tienen la misma solución.
- Dos matrices son equivalentes si se puede pasar de una a otra a través de un número finito de operaciones elementales.
- Las operaciones elementales sobre matrices o sistemas lineales son:

Permutación de filas o columnas entre sí.

Multiplicación de una línea por un número distinto de cero.

Suma algebraica de una línea con otra paralela, multiplicada por un número.

- Gráficamente, un sistema de ecuaciones lineales tiene forma rectangular. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \end{pmatrix}$$

El método de eliminación de Gauss reduce el sistema para llevarlo a una forma triangular.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 26 \\ 0 & 4 & 8 & 39 \\ 0 & 0 & -12 & -33 \end{pmatrix}$$

P.3 Resolvé los siguientes sistemas lineales utilizando el método de eliminación o reducción de Gauss. Verificá las soluciones. Escribí, para cada ítem, dos sistemas lineales equivalentes al dado.

a) $\begin{cases} x - y - 3z = -4 \\ 2x - y - 4z = -7 \\ x + y - z = -2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - 4z = 8 \\ x - 2y - 2z = 14 \\ x + y - 2z = -1 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

P.4 a) Proponé un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, que tenga como solución x= 2 e y = 3. Escribí cómo pensás y desarrollás la resolución de lo pedido.

b) Lo explicitado en el ítem anterior, ¿es posible aplicarlo a cualquier sistema lineal?, ¿por qué? Ejemplificá.

7.3. De los sistemas lineales a la multiplicación de matrices

El sistema lineal, que ya fue analizado y resuelto (con el método chino y el de Gauss):

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Que conocemos su solución: $x = \frac{37}{4}, y = \frac{17}{4}, z = \frac{11}{4}$. Como este sistema tiene solución única, se lo llama *sistema compatible y determinado*. Es compatible porque tiene solución, y es determinado porque la solución es única.

También puede pensarse que el sistema surge de una multiplicación entre matrices, del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{pmatrix}$$

A: matriz de los coeficientes de las incógnitas	Matriz columna de las incógnitas	Matriz columna de los términos independientes

Entonces cobra mayor relevancia la matriz de los coeficientes, ¿por qué? Porque podríamos anticipar si el sistema planteado es compatible y determinado, como es el caso del ejemplo.

¿Cómo lo anticiparíamos? Utilizando una matriz cuadrada cuyo determinante sea distinto de cero. Puesto que esa matriz estaría formada por tres filas (columnas) que no tienen una combinación entre ellas.

P5. a) Comprobá que el determinante de la matriz A del ejemplo es distinto de cero.

b) La matriz de los coeficientes del sistema planteado en P3. a) tiene asociado un determinante distinto de cero, ¿por qué?

c) El determinante de la matriz de los coeficientes de P3. c), ¿también es nulo?, ¿por qué?

P6. a) Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, analizá si hay combinación entre sus filas, calculando su determinante.

b) Con la matriz anterior, formamos el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 6y + 5z = 5 \\ -x - 3y - z = 2 \end{cases}$$

Resolvelo por el método de reducción de Gauss.

Analizá lo que se obtiene y relacionalo con lo realizado en el ítem anterior.

¿Qué nombre recibiría un sistema con las características encontradas? ¿Por qué?

c) Con la misma matriz, formamos otro sistema lineal:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 6y + 5z = 1 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Resolvelo por el método de reducción de Gauss.

Analizá lo que se obtiene y relacionalo con el determinante de la matriz de los coeficientes.

¿Qué nombre recibiría un sistema con las características encontradas? ¿Por qué?

d) Escribí un texto en donde describas las diferencias y similitudes entre los ítems anteriores b), c), en la formación y resolución de sistemas lineales.

P7. ¿Qué ecuación agregarías en cada caso para resulte un sistema compatible determinado, un sistema compatible indeterminado, un sistema incompatible? ¿Es la misma ecuación para cada posibilidad?, ¿por qué?

a) $\begin{cases} -x + y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x - y - 3z = -4 \\ 2x - y - 4z = -7 \\ x + y - z = -2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$

7.4. Del texto a los símbolos

Leé los siguientes enunciados y simbolizá las condiciones que en cada uno se detallan.

P8. Una fábrica de componentes electrónicos produce tres tipos de transistores: BJT, JFET y MOSFET. Cada BJT requiere para su fabricación 3 unidades de silicio, 1 de boro y 2 de resina. El JFET requiere de 3 de silicio, 2 de boro y 1 de resina. El MOSFET requiere de 2, 1 y 2 unidades de cada material respectivo.

a) ¿Cuántos transistores de cada tipo podrán fabricarse con una partida de materia prima de 810 unidades de silicio, 410 de boro y 490 de resina?

b) ¿Y con otra partida de 1530, 770 y 940 unidades de silicio, boro y resina respectivamente?

P9. Un país importa petróleo crudo de tres clases distintas. El OPEP (distribuido por la Organización de Países Productores de Petróleo), el Brent (oriundo del Mar del Norte) y el WTI (West Texas Intermediate). En la siguiente tabla, se indica la cantidad de barriles (en miles) importados en tres períodos diferentes (A, B y C), así como también el importe pagado (en miles de dólares) en cada una esas compras.

	OPEP	**BRENT**	**WTI**	**IMPORTE**
A	25	5	5	2025
B	10	30	2	2490
C	10	8	16	2220

Si el precio del barril de cada tipo de petróleo no varió entre los períodos en que se realizaron las tres compras, ¿cuál es el precio pagado por barril para cada uno de los tipos de petróleo?

P10. Mediante un estudio de suelo, se llega a la conclusión de que, para lograr un crecimiento óptimo de los vegetales que se van a sembrar en él, son necesarias para cada hectárea 36 unidades de nitrógeno, 46 unidades de ácido fosfórico y 26 unidades de potasio soluble al suelo.

En el mercado existen tres marcas distintas de fertilizante que pueden utilizarse y que contienen alguno o todos estos componentes. Cada bolsa de la marca A posee 1 unidad de nitrógeno, 3 de ácido fosfórico y 2 de potasio. Cada bolsa de la marca B posee 3, 2 y 1 unidad respectivamente. Las bolsas de la marca C contienen 2 unidades de nitrógeno y 1 unidad de ácido fosfórico, pero no posee potasio. Para lograr el crecimiento óptimo deseado, ¿cuántas bolsas de cada marca serán necesarias para fertilizar cada hectárea de suelo?

P11. Una empresa decide invertir 2 millones de pesos en bonos, fondos fiduciarios y acciones. Mediante un estudio de mercado, establece que los bonos le darán un beneficio del 6%; los fondos, del 10%, y las acciones, del 12%. Se toma la decisión de invertir un 30% del capital en acciones. Por otro lado se espera, al final de la inversión, tener un beneficio total del 9%. Con estas condiciones, calculá el dinero que se debe invertir en bonos, fondos fiduciarios y acciones.

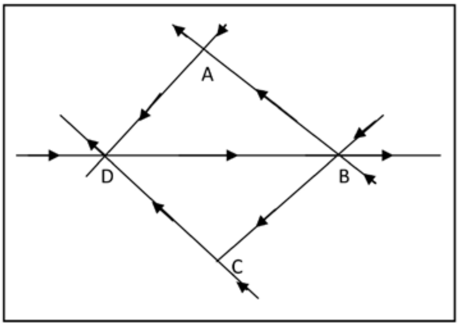
P12. En una empresa de Tierra del Fuego, se producen tres tipos de televisores: FLAT, LCD y LED. En una de las plantas de la empresa se realizan las dos últimas etapas de la producción: el trabajo electrónico de soldado entre las plaquetas y el ensamblado final del producto. Para cada televisor FLAT, se necesitan 2 horas de trabajo electrónico y 2, de elisión. Para los LCD se emplean 1 hora de trabajo electrónico y 3, de elisión. Para cada televisor LED se emplean 3 y 2 horas, respectivamente. En función de la mano de obra, la empresa dispone de 100 horas semanales para cada uno de los trabajos, electrónico y de ensamble.

a) ¿Cuántos televisores de cada tipo puede producir por semana si se utiliza todo el tiempo disponible?

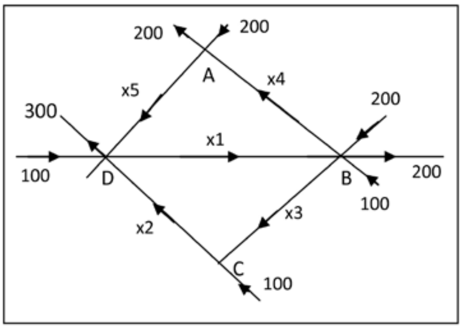
b) ¿Tiene el problema una solución única? ¿Cómo puede interpretarse la solución?

P13. Una aplicación de los sistemas lineales es la modelización algebraica de diagramas de flujo. Estos diagramas pueden representar diversas cuestiones como la circulación de corriente eléctrica, la entrada y salida de datos de un sistema informático o el tráfico automovilístico en un trazado de calles, entre otras cosas.

a) Por ejemplo, el siguiente esquema representa el flujo de tránsito de un sistema de calles, las cuales solo pueden circularse en el sentido que indican las flechas. En este circuito, los vehículos entran y salen de las intersecciones A, B, C y D. Si suponemos que los autos no pueden estacionarse a lo largo de este trazado, la cantidad de vehículos que ingresa a una intersección tiene necesariamente que ser igual a la cantidad que sale de ella.



Es posible simbolizar, en el mismo diagrama, la cantidad de vehículos por hora que circula por cada calle. Supongamos que se toma dicho registro únicamente en las esquinas sin contabilizar lo que ocurre "dentro" del trazado. En el gráfico de la derecha, esos registros se indican mediante los valores numéricos.



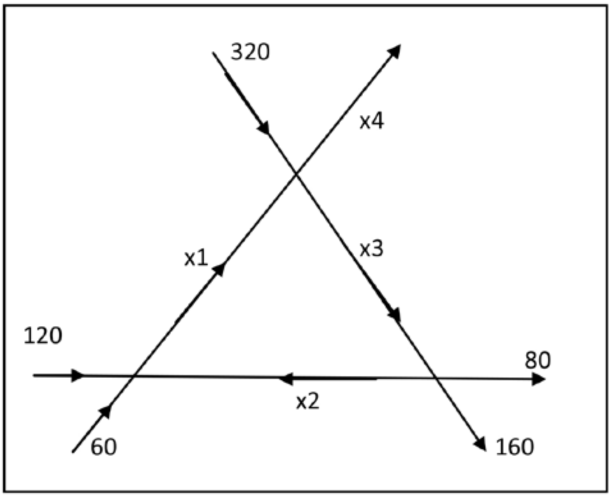
Ahora, ¿cómo calcular la cantidad de vehículos por hora que circula por cada una de las calles del circuito "interior"? Esto es posible a partir de la cantidad de vehículos que llega y sale de cada una de las esquinas.

Por ejemplo, para la esquina B, los autos que llegan pueden simbolizarse como x1+200+100, mientras que los que salen son 200+x3+x4. Y como la cantidad de vehículos que entran debe ser igual a los que salen, se tiene: x1+200+100 = 200+x3+x4.

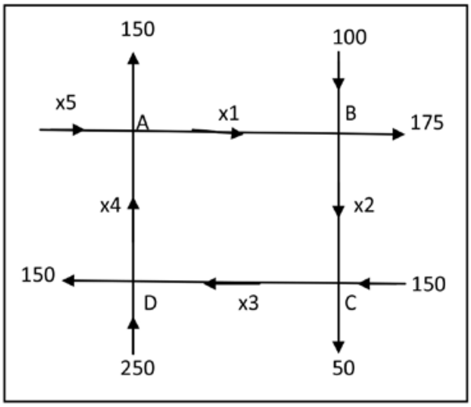
a_1) Simbolizá las ecuaciones que representan lo que ocurre en las otras 3 esquinas.

a_2) Si resolvés el sistema planteado por las ecuaciones simbolizadas, ¿se obtendría solución única?, ¿por qué?

b) En otro cruce de calles como el que muestra la figura, se indica también el número de autos por hora que circula por cada tramo en la dirección indicada en cada caso (sabiendo que en ese recorrido está prohibido estacionar). Se va a suspender la circulación del tramo x2 para hacer unas reparaciones. Durante ese período, ¿qué cantidad de vehículos por hora transitan los tramos x1, x3 y x4?



P14. El sistema de telefonía de una ciudad está interconectado a 4 centrales A, B, C y D. Estas controlan el flujo de llamadas por hora en las direcciones indicadas en el diagrama, y además las líneas de transmisión no son reversibles.



a) ¿Qué valores toman los tramos x1, x3, x4 y x5 si se interrumpe la conexión entre las centrales B y C por un desperfecto?

b) ¿Qué ocurriría en cambio con las otras líneas si el tramo que se interrumpe es el que une a las centrales A y B? ¿Cómo se interpreta el resultado obtenido?

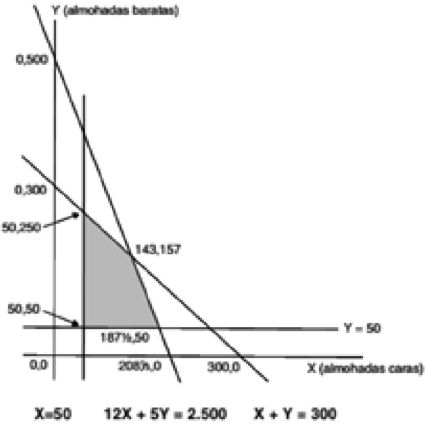
7.5. Algunas condiciones se desequilibran, pero logramos el óptimo

En este apartado presentaremos un modelo matemático que combina ecuaciones e inecuaciones, que están reguladas por la disponibilidad de recursos y es necesario que estos se utilicen de un modo óptimo, dentro de lo posible.

Para la presentación de este modelo, seguiremos algunos párrafos escritos por John Allen Alan Paulos sobre el tema:

"La programación lineal es un método para maximizar (o minimizar) una cierta cantidad asegurando al mismo tiempo que se cumplen ciertas condiciones sobre otras cantidades. Generalmente estas condiciones son lineales (sus gráficas son líneas rectas), de ahí el nombre de la disciplina: programación lineal. Es una de las técnicas más útiles de la investigación operacional, que es como se conoce el conjunto de instrumentos matemáticos desarrollados después de la Segunda Guerra Mundial para mejorar el rendimiento de los sistemas económicos, industriales y militares, y desde entonces se ha convertido en un ingrediente habitual de los cursos de matemáticas de las escuelas de empresariales. […]

Después de este preliminar consideremos el siguiente problema, que es un caso auténtico de programación lineal. Sin dejar las aplicaciones de la economía, supondremos que una empresa fabrica dos tipos de almohadas. Producir una almohada cara cuesta 1200 ptas. y se vende a 3000 ptas., mientras que una barata cuesta 500 ptas. y se vende a 1800 ptas. La compañía no puede fabricar más de 300 almohadas al mes y no puede gastar más de 250.000 ptas. al mes en su producción. Si la compañía ha de fabricar al menos 50 almohadas de cada tipo, ¿cuántas han de fabricar de cada clase para maximizar sus beneficios?



La región sombreada satisface todas las desigualdades

Si llamamos X al número de almohadas caras que la compañía fabrica cada mes e Y al de almohadas baratas, podemos convertir las condiciones sobre X e Y del problema en: $X + Y \leq 300$; $X \geq 50$; $Y \geq 50$; y $1.200\ X + 500\ Y \leq 250.000$. La última desigualdad se debe a que si fabricar una almohada cara *cuesta 1200 ptas., producir X costará 1200X ptas.; y análogamente, hacer Y almohadas baratas costará 500 Y ptas. Obsérvese que estas condiciones se expresan como desigualdades lineales, cuyas gráficas son regiones del plano delimitadas por líneas rectas (o, en problemas más complicados, por sus análogos en espacios de más dimensiones).*

La cantidad que hay que maximizar es el beneficio, que en términos de X e Y vale P = 1800X + 1300Y. Esto es así porque el beneficio que se tiene por cada almohada cara es de 1800 ptas. (3000 ptas. – 1200 ptas.), y por cada almohada barata 1300 ptas. (1800 ptas. – 500 ptas.), con lo que X de las primeras dan un beneficio de 1800X ptas., e Y de las segundas dan 1300Y ptas. Una vez tenemos el problema planteado así, hay varias técnicas para hallar la solución. Una es gráfica y consiste en encontrar los vértices y los lados de la región permitida –la parte del plano en la que son válidas todas las desigualdades– y luego probarlas para encontrar en cuál de ellas se tiene el máximo beneficio.

Con este método, y un poco de geometría analítica, descubrimos que la compañía de almohadas debería fabricar 143 almohadas caras y 157 baratas al mes si quiere obtener el máximo beneficio." (Paulos, 2003: 216-218).

P15. Apliquemos lo analizado en párrafos anteriores a la siguiente situación:

Un productor agropecuario posee 100 hectáreas destinadas a la siembra y, en función de las características del suelo, decide sembrar maíz y trigo. A partir del cálculo de costos establece que para cada hectárea sembrada de maíz gastará \$40 en semillas \$200 en mano de obra. Por cada hectárea que siembre con trigo, tendrá un gasto de \$60 en semillas y \$100 de mano de obra. Se dispone de \$4800 para destinar a la compra de semillas y \$14.000 para gastos de mano de obra. Se estima que el ingreso de la cosecha será de \$1100 por cada hectárea de maíz y \$1500 por cada hectárea de trigo. ¿Cuántas hectáreas debería sembrar el productor, con cada una de las semillas, para que la ganancia sea la máxima posible?

Para tener en cuenta:

Este modelo matemático, el de **programación lineal**, se ha venido aplicando de forma efectiva a problemas prácticos muy distintos. El aspecto común que presentan estos problemas es el de seleccionar una decisión de entre varias, a fin de maximizar o minimizar un objetivo dado. El alcance de las decisiones está limitado por la disponibilidad de recursos y la necesidad de satisfacer unos requerimientos de calidad, de mercado o de producción.

Con las condiciones descritas y como normalmente disponemos de recursos limitados para conseguir determinados objetivos económicos, y como pueden existir diversos cursos de acción para alcanzarlos, cabe la pregunta, ¿cuál de ellos debemos seguir para **optimizar** la utilización de estos? La programación lineal nos permite decidir la elección de la alternativa adecuada para utilizar de la mejor manera posible los recursos disponibles.

Los requerimientos para construir un modelo de programación lineal son:

Función objetivo. Debe haber una meta que se desea alcanzar. Por ejemplo, maximizar las utilidades, minimizar el costo, maximizar el potencial de clientes esperados, minimizar el tiempo total, minimizar el desperdicio del sistema que se estudia, etc.

Restricciones y decisiones. Debe haber un número de variables que debe manejarse en forma simultánea, es decir que interactúan. Estas variables pueden ser productos, horas-máquina, horas-hombre, dinero, superficie u otros factores según sea el problema. También distinguimos las variables que son de salida del sistema –en general productos–, otras que son de entrada –materias primas, horas-hombre, etc...– , que son los recursos, nunca negativos.

La función objetivo y las restricciones son lineales. Debemos poder simbolizar todas estas condiciones usando solamente ecuaciones lineales o inecuaciones lineales.

Puede pensarse que la limitación de linealidad impone que muchos problemas no sean susceptibles de ser resueltos por esta técnica; puede que sea así, pero su actual aplicación está ligada al uso masivo de computadoras y al desarrollo de software específico, pues se trabaja con gran cantidad de variables.

P16. Un productor de soja puede vender su cosecha en el mercado interno o exportarla. En el mercado interno, por cada tonelada vendida tiene un ingreso de \$1200. El ingreso por cada tonelada vendida en el exterior es de \$1900. La infraestructura de sus campos y maquinarias no le permite producir más de 9000 toneladas por cosecha. Sabe además, en función de ventas anteriores, que el mercado interno del que participa demanda, como máximo, 5000 toneladas. En su país existe una restricción de hacienda, que no le permite exportar más del triple de lo que venda en el mercado interno. ¿Qué cantidad de toneladas deberá vender en cada mercado para que sus ingresos sean los máximos posibles? ¿Cuál serían sus ingresos en ese caso?

P17. Una empresa produce pelotas de fútbol de cuero, de material sintético y de fútbol sala. La empresa posee dos instalaciones, una en Florencio Varela y otra en Avellaneda. La primera fábrica tiene una producción diaria de 60 pelotas de cuero, 100 sintéticas y 35 de fútbol sala. La fábrica de Avellaneda puede producir diariamente 90, 50 y 105 pelotas de cada modelo, respectivamente. Poner en funcionamiento la maquinaria de la fábrica de Florencio Varela tiene un costo operativo diario de \$3000, mientras que el costo operativo de las instalaciones de Avellaneda es de \$3300. Si la empresa recibe un pedido de 5400 pelotas de cuero, 5400 pelotas sintéticas y 4200 de fútbol sala, ¿cuántos días debe operar cada fábrica para elaborar las pelotas pedidas al menor costo posible?

P18. La línea de perfumería de una empresa de cosmética elabora dos tipos de fragancias florales, F1 y F2. La diferencia entre ambas la intensidad del aroma. La fragancia F1 se compone 5% de extracto de flores, 10% de alcohol y el resto de agua. La fragancia F2 posee 10% de extracto floral y 15% de alcohol. El precio de venta mayorista de F1 y F2 es de \$350 y \$600 por litro, respectivamente. La empresa posee en el depósito 70 litros de extracto floral y 120 litros de alcohol. Si se supone que toda la producción será vendida, ¿cuántos litros de cada fragancia deberá fabricar para que sus ingresos sean lo mayores posible?

P19. Un municipio de la provincia de Buenos Aires planifica la apertura de centros de asistencia médica para la comunidad. El municipio está dividido en las regiones Este y Oeste. Debido a las particularidades propias de cada región, como la densidad de población y las necesidades de los habitantes, las autoridades establecen que las configuraciones de los Centros Asistenciales de cada una serán diferentes. A cada Centro de la región Este se destinarán 2 médicos y 4 asistentes técnicos; y su gasto de infraestructura y equipamiento será de 5 millones de pesos. A cada Centro de la región Oeste se destinarán 3 médicos y 3 asistentes técnicos, y el gasto para cada uno de ellos será de 15 millones de pesos.

El municipio dispone ya de 30 médicos y de 48 asistentes técnicos contratados para dicha tarea. Además, tiene para invertir en estas obras un monto de 120 millones de pesos. Con estas condiciones, ¿cuál es el número máximo de centros de salud que pueden ponerse en funcionamiento y cuántos en cada una de las regiones?

Una última historia: Dantzig y la programación lineal

George Bernard Dantzig nace en 1914. Se recibe de doctor en Estadística en 1946. Después de eso, trabaja para la Fuerza Aérea como asesor de Matemática del U. S. Air Force Controller. En ese trabajo encuentra los problemas que lo llevan a realizar grandes descubrimientos. La Fuerza Aérea necesitaba una forma rápida de calcular el tiempo de duración de las etapas de un programa de despliegue, entrenamiento y suministro logístico.

Cuando formulé por primera vez mi modelo de programación lineal, lo hice sin la función objetivo. Estuve luchando por algún tiempo con la adición de reglas básicas para elegir de entre las soluciones factibles la que en algún sentido fuese «óptima». Pero pronto abandoné esta idea y la sustituí por la de una función objetivo por ser maximizada. El modelo que formulé no estaba hecho para fines militares. Podía aplicarse a toda clase de problemas de planeación; todo lo que tenía que hacerse era cambiar los nombres de las columnas y los renglones, y entonces era aplicable a un problema de planeación económica lo mismo que a un problema de planeación industrial. (Dantzig (año), citado en Grossman, 1993: 74).

CAPÍTULO 8

Para seguir estudiando

Marcelo Aranda – M. Carolina Benito – Rosa Grejcaruk – Roberto D. Moyano – Mónica Real – Mariana Viale

Las siguientes actividades son fruto del trabajo colaborativo de docentes de Matemática del Instituto de Estudios Iniciales, pensadas específicamente para profundizar el estudio de las temáticas desarrolladas en otros capítulos de este libro.

8.1. Capítulo 1:

1. En las siguientes expresiones aparecen letras, números y signos que identifican operaciones.

i-Analizá las diferencias que puedas observar en ellas, con respecto a los símbolos que aparecen y a su significado matemático.

ii- Escribí tus conclusiones

a. $5x - 3 + 4 \cdot (2x + 5)$

b. $2b + 2h = P$

c. $2b + 2h = 25$

d. $4n + 1$

e. $4 \cdot n + 1 = 129$

f. $7 \cdot (x - 4) = 75x$

g. $8x^2 - 3 = 5$

2. Realizá una síntesis de los conceptos claves (a los que llamaremos “definiciones”), y proponé un ejemplo para cada uno de ellos.

Ecuación – identidad - comprobación o verificación - soluciones o raíces de una ecuación

3. Indicá cuál o cuáles de las siguientes expresiones son identidades.

a)$(x-3)(x+3)=x^2-9$ **b)**$(x-3)\cdot 3+6(x+1)=-2x+7$

c)$9+6x+x^2=(x+3)^2$

4. ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones no tienen solución en el conjunto de los números naturales? ¿Cuáles no tienen solución en el conjunto de los números reales? ¿Cuáles tienen infinitas soluciones? Justificá las respuestas.

a)$2x+3=x$ **b)**$7x+4=7x-1$ **c)**$4n+2z=6$

d)$x+y=4$ **e)**$2\cdot(x-3)=4$ **f)**$2\cdot(x+3)=4$

g)$x^2+y^2=-1$ **h)**$x^2+4=0$ **i)**$-2x^2+1=5$

5. Completar el cuadro:

Lenguaje coloquial	**Lenguaje simbólico**
Un número	
El siguiente de un número	
El triple de un número	
La mitad del anterior de un número	
	2x
El producto de un número y su consecutivo	
	n-1

El 50% de un número	
El 20% de un número	
Un número aumentado en su 20%	

6. Encontrá todos los valores que puede tomar $n \in \mathbb{N}$ para que se cumpla lo indicado en cada caso:

a) 5n+2=3 **b)** 3(n+1)-2=5 **c)** 7(n+3)=7

d) 3n-n = 2n **e)** n(n-1)=-n+4 **f)**5n-3 = 5n

7. ¿Cambian las soluciones de las ecuaciones del ejercicio anterior si se toma $n \in \mathbb{R}$? Justificá.

8. Dada la ecuación $2x + 3y = 6$. Determiná el valor de $x \in IR$ que la verifica, para los siguientes valores de *y*:

a) $y = 2$ b) $y = \frac{1}{3}$ c) $y = -2$ d) $y = 0$

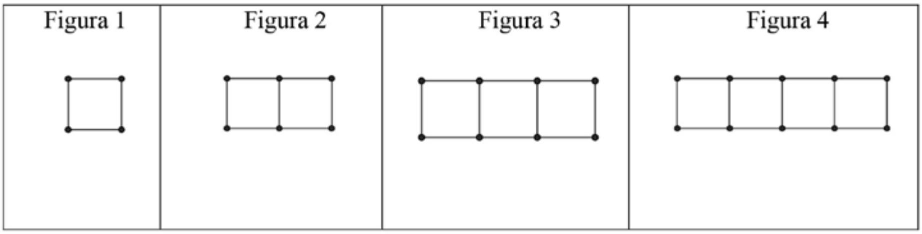
9. Resolvé las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$ y explicá por qué en algunos casos no hay solución:

a) $x - 3 = x + 2$ **b)**$3(2x - 1) = 2(3x + 9)$

c)$\frac{2-x}{5} = \frac{2+x}{4}$ **d)**$\frac{5}{x} + 1 = -4$

e)$(x - 2)^2 + 3 = -8$ **f)**$-3x = 5 - x$

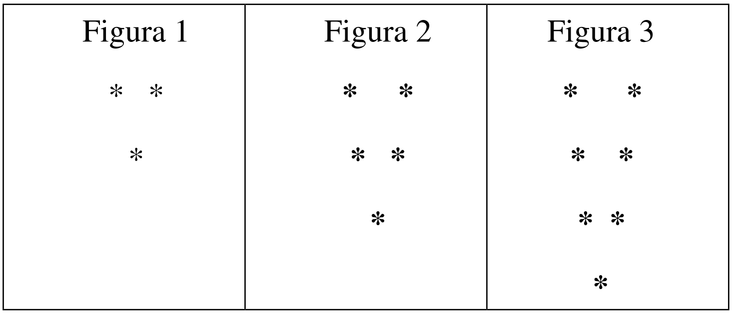
10. La siguiente es una secuencia de figuras compuesta por cuadrados en cuyos vértices se colocaron bolitas. La secuencia continúa infinitamente agregando cada vez un cuadrado más, como se ha indicado en estas primeras cuatro figuras dibujadas:



a) ¿Cuántas bolitas serán necesarias para la figura número 7? ¿Y para la figura número 12?

b) ¿Es posible tener una figura con 388 bolitas? En caso de ser posible, ¿cuántos cuadrados habría?

11. Si se construye la siguiente sucesión de figuras siguiendo la tendencia sugerida, determinar:



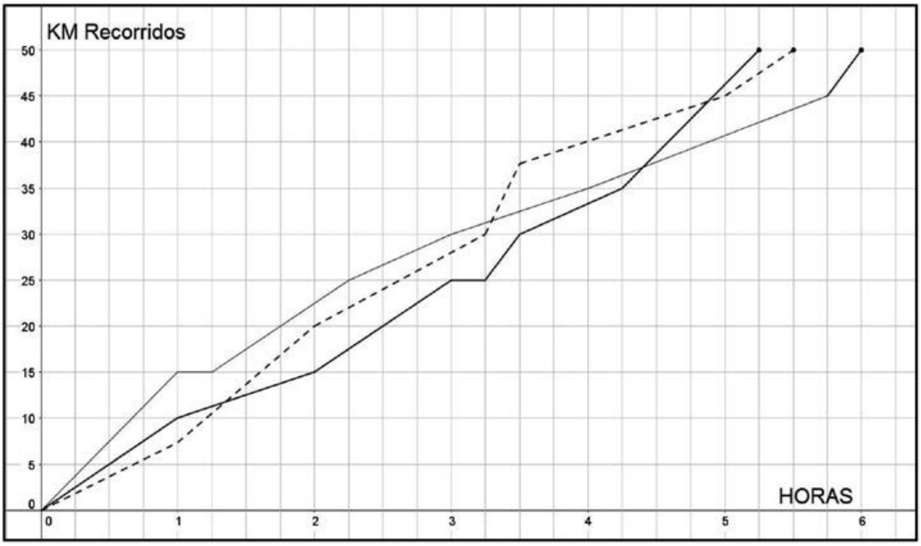
a) ¿Cuántos asteriscos serán necesarios para armar la figura número 6? ¿Y la número 100?

b) ¿Es posible que haya una figura que tenga 110 asteriscos?

c) Proponé una expresión que permita calcular el número de asteriscos según el número de figura.

8.2. Capítulo 3:

12. El siguiente gráfico representa la distancia recorrida en kilómetos, por los 3 atletas que obtuvieron los primeros 3 puestos en una maratón, a medida que transcurre el tiempo.



a) ¿Cuántos km se corrieron en la maratón? ¿Cuántas horas le llevó a cada atleta completar la competencia?

b) Tomando en consideración al que llegó primero: ¿Cuánto tiempo después llegó el segundo? ¿Y el tercero?

c) ¿Algún corredor detuvo la marcha en algún momento? ¿Qué elemento del gráfico muestra tu respuesta?

d) En la primera hora de carrera, ¿quién fue más rápido? ¿Cómo puede observarse eso en el gráfico?

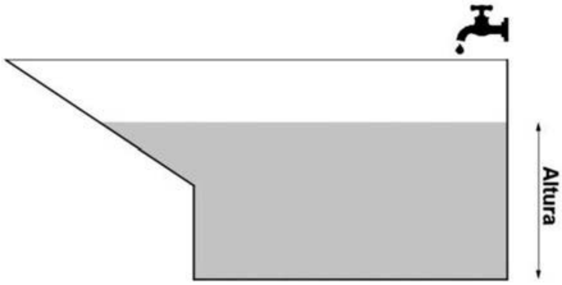
e) ¿Cuántos km recorrió cada uno de los atletas en las primeras 2 horas de carrera?

f) ¿Qué atleta recorrió primero 30km de competencia? ¿Cuánto tiempo le llevó hacerlo? ¿Y a los otros?

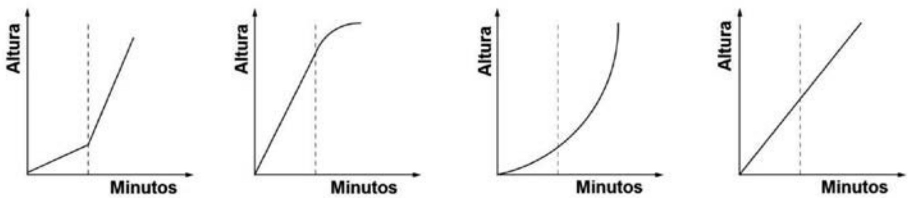
g) ¿Cuánto tiempo le llevó a cada uno hacer los primeros 20km?

h) A los 35km de carrera, ¿las posiciones son las mismas que las del final de la competencia? ¿Y a las 3 horas de competencia?

13. Se llena una pileta como la de la figura con un caudal constante de agua:



¿Cuál de las siguientes representaciones gráficas se ajusta mejor a la situación? Explicá por qué.



El eje horizontal representa los minutos transcurridos y el eje vertical la altura de llenado de la pileta.

14. A partir del siguiente informe enviado desde la provincia de Río Negro, confeccioná un gráfico en que se describa el precio P de un kilogramo de manzana en función del día del año.

Informe*: En el primer mes del año el precio se mantuvo estable en $ 1 por kg. En la última quincena del mes de febrero comenzó a bajar* *hasta que el día 10 de abril, alcanzó un precio de $0,50 por kg; este precio se mantuvo constante hasta finalizar el mes de mayo, a partir de junio se registró en aumento sostenido en el precio que permitió vender la manzana a $2 el kg el 15 de octubre, a fines de noviembre nuevamente el precio comenzó a decrecer, para ser a fin de diciembre de $ 1,20 por kg.*

Respondé:

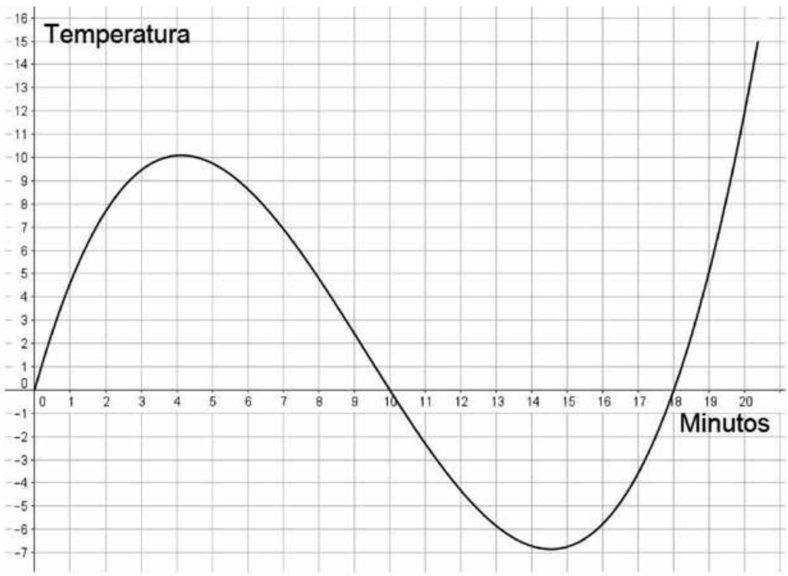
a) Si P(x) = precio del kg de manzana el día “x”, ¿cuál es el dominio de la función P? ¿Cuál es el conjunto imagen de la función P?

b) ¿En qué intervalo la función es creciente?

c) ¿Y en qué cuál es decreciente?

d) Indicá el o los intervalos en los que la función se mantiene constante. ¿Qué valor alcanzó la función es ese (o esos) casos?

15. Se analiza el comportamiento de cierta reacción química. Para ello se registra la variación de temperatura hasta que la reacción se completa (a los 15 °C).



a) ¿A qué temperatura se encuentra a los 7 minutos? ¿Y a los 13?

b) ¿Cuántos grados aumentó entre los 15 y 19 minutos?

c) ¿Cuántos minutos tardó en ir de 10 ºC a -6 ºC?

d) ¿A qué temperatura máxima llegó en los primeros 18 min? ¿Cuál es la temperatura mínima en ese mismo período?

e) ¿En qué momentos la temperatura fue positiva? ¿Y bajo cero?

f) ¿En qué momentos la temperatura fue de 0°?

g) Indicá los intervalos en los que la temperatura crece y en los que decrece.

h) ¿En qué momento la temperatura fue de 5 ºC? Explicar.

16. La siguiente tabla nos da la información de la factura de agua que la empresa proveedora del servicio envía a nuestro domicilio.

Cargo fijo	\$24
Consumo mensual (40 m^3)	\$24,18
Total pendiente de pago	\$48,18

A partir de la información anterior:

a) ¿Cuál es el costo del cargo variable por m^3?

b) ¿A cuánto ascenderá la factura de un domicilio que consume 23 m^3 de agua en un mes?

c) Escribí una fórmula que permita calcular el monto pendiente de pago según el consumo mensual de agua en $m^{3.}$

d) ¿Cuál es el consumo del mes si se abonó $40?

e) Realizá un gráfico en el que se represente el monto pendiente de pago en función de los m^3 consumidos.

17. Un almacén vende lavandina suelta en bidones de 5 litros. Cobra $ 1 por envase y $1,60 por litro de lavandina.

a) ¿Cuánto deberá pagar una señora que compró 3,5 litros de lavandina y no tenía envase propio?

b) ¿Es cierto que si compra 7 litros de lavandina el monto por abonar es el doble?

c) Escribí una fórmula que permita calcular el monto a cobrar por el almacenero si el cliente no posee envase y compra x litros de lavandina.

d) ¿Cuántos litros de lavandina se podrá comprar si solamente se dispone de $4, 20 y no se tiene envase?

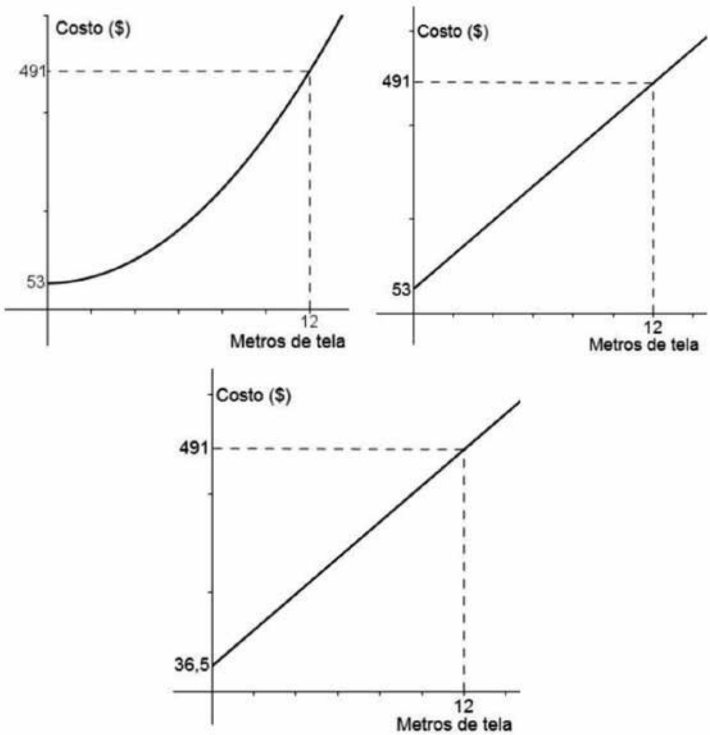
e) Realizá un gráfico en el que representes el monto a cobrar por x litros de lavandina si el cliente no lleva envase.

18. Una retacería cobra $53 en concepto de corte y embalado por cada tela que se compre (independientemente de los metros de tela). Si por la compra de 12 metros de jersey me cobraron $491:

a) ¿Será cierto que si hubiese comprado 24 metros hubiese pagado el doble? Justifica tu respuesta.

b) ¿Cuánto cuesta el metro de jersey? ¿Cuánto cuestan 36 metros de jersey?

c) ¿Cuál de las siguientes representaciones gráficas consideras que puede representar la relación entre el precio pendiente de pago y los metros de jersey que se compre? Justificá tu elección.



19. Juan debe decidir entre 3 gimnasios para hacer sus rutinas de ejercicios:

-El gimnasio A cobra $200 de inscripción y $10 por hora de uso de los aparatos.

-El gimnasio B cobra $40 de inscripción y $30 por hora de uso de los aparatos.

-El gimnasio C cobra $400 por mes.

a) ¿Cuál de las opciones le conviene elegir si va a usar los aparatos 5 horas? ¿Y si fuesen 10? ¿Y si fuesen 25? Fundamentá las respuestas.

b) Unos amigos de Juan fueron a dos de estos gimnasios y usaron los aparatos. Sabiendo que uno fue al gimnasio A y el otro al B y ambos fueron la misma cantidad de horas, ¿es posible que hayan pagado lo mismo? ¿Por qué?

c) Realizá un informe en el que se indique la conveniencia de elegir el gimnasio A, B o C, según la cantidad de horas que Juan va a usar los aparatos. ¿Es posible representar esta información gráficamente?

20. Nahir es una buena vendedora que trabaja en una empresa de seguros. Allí cobra $10.000 en sueldo fijo más un 20% de comisión por ventas realizadas en el mes. Su jefe le propone un aumento de manera tal que cobre 22% de comisión por mes, pero le bajará el básico a $8000.

a) Escribí una fórmula que permita calcular el sueldo mensual de Nahir en función del monto de las ventas realizadas para cada una de las situaciones planteadas anteriormente.

b) ¿Cuánto debe vender para cobrar lo mismo con ambas propuestas?

c) ¿Le conviene a Nahir aceptar la propuesta de su jefe? Explicá por qué.

d) Realizá un gráfico en el que se pueda visualizar el sueldo de Nahir a partir de las ventas realizadas en el mes en cada uno de los casos.

21. Dos bidones se vacían mediante canillas. El bidón A tiene inicialmente 10 litros y el caudal de líquido que se extrae es de 3 litros por cada minuto. En el caso del bidón B, la expresión que relaciona la cantidad de agua que tiene el mismo en función del tiempo que tarda en vaciarse es: $y = -2x + 8$ (en la que y es la cantidad de líquido en el bidón medido en litros y x es el tiempo que transcurre desde que comienza a vaciarse medido en minutos).

a) Escribí la expresión de la función que relaciona la cantidad de agua que tiene el bidón A con el tiempo transcurrido desde que comienza a vaciarse. Realizá un gráfico de la situación considerando los dos bidones.

b) ¿En algún momento ambos bidones contienen la misma cantidad de agua?, si es así, ¿cuánto tiempo transcurrió para que ocurra eso y qué cantidad de agua contenían en ese instante?

22. Un quiosco de diarios y revistas que se encuentra en la esquina de un hipermercado contrata a un contador para que calcule su punto de equilibrio mensual (ingresos = costos). El puesto vende por mes 1500 revistas solo a pedido, a \$50 cada una, y diarios, a demanda, a \$30 cada uno (la ganancia en ambos casos es del 40%) y los gastos del puesto son: alquiler \$2000, luz \$200, sueldo del empleado \$6000.

a) Sobre la base de estos datos realiza el trabajo encomendado al contador.

b) ¿Cómo se modificaría la situación del equilibrio si el supermercado nos invita a colocar el puesto en su puerta, hecho que incrementa la venta de revistas en 2000 unidades mensuales a cambio de pagar un costo adicional al supermercado de \$500?

23. Un barril de madera tiene capacidad para 100 litros. El barril vacío pesa 30 kg. Si un litro de aceite que se coloca en este pesa 0,75 kg.

a) ¿Cuánto pesará el barril al apoyarlo en una balanza si tuviera 20 litros de aceite? Si la balanza marca 48,75 kg, ¿puede ser que el barril contenga 18 litros?

b) ¿Cuál es el peso máximo que se puede leer de la balanza al pesar el barril? ¿Qué cantidad de litros contendría en ese caso?

c) Si el barril tiene una cierta cantidad de aceite y pesa 60 kg, calculá cuánto pesaría si se le agregan 20 litros.

d) Definí una función mediante una fórmula que permita expresar el peso del barril dependiendo de la cantidad de aceite que el barril contiene. Realizá un gráfico que corresponda a la situación.

8.3. Capítulo 4:

24. Se dispone de 40 metros de tejido de alambre para rodear un cantero rectangular en el que se va a realizar una plantación de rosales. Para el armado del mismo, se va a utilizar todo el tejido de alambre disponible.

a) ¿Cuál es el área del cantero si tiene un largo de 12m? ¿Habrá otras dimensiones posibles para que el cantero sea de igual área?

b) ¿Cuáles pueden ser las dimensiones del cantero si el mismo tiene un área de $75m^2$?

c) ¿Cuáles son las dimensiones mínimas y máximas para el cantero? Justificá.

d) Hallá las dimensiones del cantero para que tenga la máxima área posible. Justificá.

25. En un laboratorio están experimentando con una población de bacterias. Se observa que al reproducirse, la masa de la población aumenta un 15% cada hora. Al comienzo, el cultivo de bacterias tiene una masa de 50g.

a) ¿Cuál será la masa de las bacterias después de 2 horas? ¿Y después de 10 horas? ¿Y después de 25 horas?

b) Encontrá una fórmula que permita calcular la masa del cultivo en función del tiempo.

c) Realizá un gráfico cartesiano en el que representes la masa del cultivo de bacterias en función del tiempo.

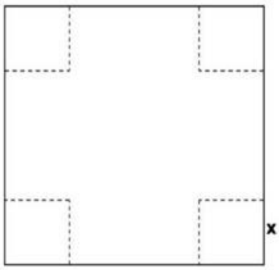
26. Los ingresos mensuales de un fabricante de zapatos están dados por la función $C(z) = 2z(500 - z)$, donde z es la cantidad de pares de zapatos que fabrica en el mes.

a) ¿Qué cantidad de pares debe fabricar mensualmente para obtener el mayor ingreso?

b) ¿Cuáles son los ingresos si se fabrican 125 pares? ¿Y 375?

c) ¿A partir de qué cantidad de pares comienza a tener pérdidas?

27. Se propone construir una caja de cartón recortando cuatro cuadraditos iguales en las esquinas de una plancha cuadrada, siguiendo la línea de puntos, como se muestra en la figura. Una vez recortados los cuadrados se pegan los bordes para armar la caja. Las planchas de cartón van en una máquina que admite que tengan como máximo 30cm de longitud.



a) En cada caso calculá, cuando sea posible, el valor de la superficie de la base de la caja que se arma al recortar cuadrados cuyos lados miden:

i) 2,5cm **ii)** 7,5cm **iii)** 8cm **iv)** 15,5cm

b) Explicá para qué medidas de los lados de los cuadrados que se recortan tiene sentido el armado de la caja.

c) Proponé una expresión o fórmula que permita calcular el valor de la superficie de la base de la caja para cualquier medida de lado que se quiera recortar.

d) Si se solicitan cajas que tengan los siguientes valores de superficies de la base:

i) 400cm^2 **ii)** 100cm^2 **iii)** 324cm^2

¿Cuál será la medida de los lados de los cuadrados recortados en cada caso?

28. Cuando a un paciente se le suministra un medicamento, la medicina entra al torrente sanguíneo. La tasa a la que se metaboliza y elimina dicho medicamento depende de cada droga en particular. Es posible medir esta variación mediante un modelo matemático que permita calcular, por ejemplo, la dosis que es preciso administrar a un enfermo para que el efecto del fármaco dure un tiempo determinado o, el tiempo que dura el efecto del fármaco conocida la dosis administrada, entre otras cuestiones.

A continuación se proponen las fórmulas que relacionan la cantidad *y* de fármaco en la sangre, medida en microgramos por litro, con la dosis administrada *A* y con el tiempo *x*, en horas, transcurrido desde que se administra el fármaco.

Cardiol	Farmatil	Adimel	Tirinol
$y = A \cdot 0{,}5^x$	$y = A \cdot 1{,}15^x$	$y = A \cdot 0{,}95^x$	$y = A \cdot 0{,}84^x$

Si la dosis inicial administrada es de 4 microgramos:

a) Realizá los cálculos que consideres necesarios y describí cómo variará la cantidad en sangre de cada uno de los fármacos a medida que pasa el tiempo.

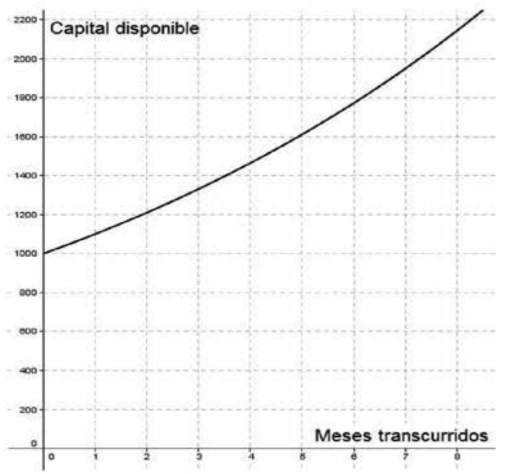
b) ¿Cuál será la cantidad en sangre de cada uno de los medicamentos a las 10 horas de haber sido administrado? Compará este resultado con la descripción que brindaste en el punto a). Realizá una descripción más precisa, si fuera necesario.

c) De los fármacos de la lista, solo tres son reales. Hay uno que no se utiliza con este fin, ¿cuál es? ¿En qué te basás para afirmarlo? ¿Qué ocurriría si se administra este medicamento?

d) Si la dosis inicial de Cardiol es de 4 microgramos/litro, ¿al cabo de cuánto tiempo se reduce a la mitad la concentración en sangre de dicho medicamento? Modificá la dosis inicial, por ejemplo: 5 microgramos, 6 microgramos, etc. y analiza en cuánto tiempo la dosis se reduce a la mitad.

e) Investigá el efecto de administrar una dosis de 4 microgramos de Adimel cada hora, (durante 6 horas). Realizá un gráfico y describí en palabras cómo evoluciona la cantidad de medicamento en sangre con este tratamiento.

29. El siguiente gráfico representa la evolución de un capital invertido a una cierta tasa de interés mensual:



a) ¿Cuál fue el capital inicial?

b) ¿Cuál es la tasa de interés mensual aproximada?

c) ¿Cuál será el capital disponible a los 24 meses?

30. César quiere construir una caja con forma de prisma rectangular sin tapa. Para ello cuenta con un cartón duro rectangular de 60cm de largo por 45cm de ancho, al que le corta un cuadrado de cada esquina.

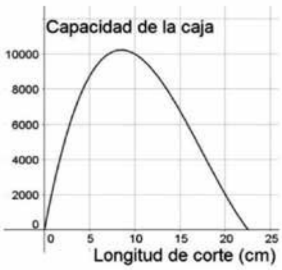
i) Analicemos la variación de la capacidad de la caja en función del corte en cada esquina:

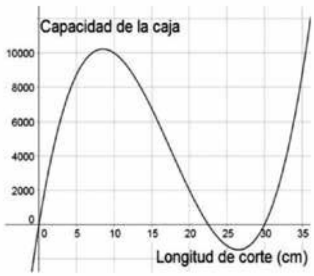
a) ¿Cuál es la capacidad de la caja si la medida que corta de cada esquina es 5cm?

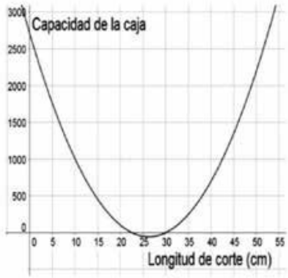
b) Escribí una fórmula que permita calcular la capacidad de la caja armada en función de la medida del lado de cada cuadrado cortado (x).

c) ¿Qué valores puede tomar x para que César pueda armar una caja?

d) ¿Cuál o cuáles de los gráficos presentados pueden representar la variación de la capacidad de la caja en función del corte realizado x? Justificá en todos los casos.





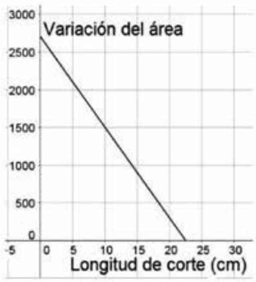


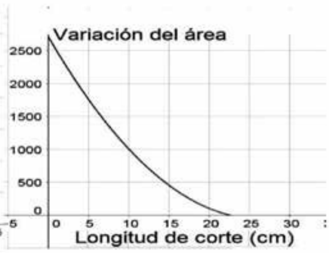
ii) Analicemos la variación del área de la base de la caja:

a) Escribí una fórmula que permita estudiar la variación del área de la base de la caja, en función del corte x realizado. ¿para qué valores de x tiene sentido en el contexto del problema?

b) En este caso, ¿podemos hablar de área mínima o máxima? Justificá.

c) ¿Cuál o cuáles de los gráficos siguientes pueden representar la variación del área de la base de la caja en función del corte x realizado? Justificá en todos los casos.





iii- Respondé: ¿cuál fue la utilidad de los análisis anteriores en el contexto del problema planteado?

31. Se invierte un capital inicial de $25.000 a una tasa de interés mensual del 2%.

a) ¿Cuántos meses debieron transcurrir si el capital disponible es de $34.319,64 aproximadamente?

b) ¿Cuánto será el capital disponible a los 25 meses?

c) Representá gráficamente el capital disponible en función de los meses transcurridos.

32 . La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de carbono 14 radiactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en años) se determina por $-8267 ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$.

Encontrá la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que permanece en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.

33. Las sustancias radiactivas tienen la propiedad de desintegrarse al emitir espontáneamente partículas alfa, electrones y rayos gamma, por lo cual pierden masa a medida que pasa el tiempo. En un laboratorio, se hace la observación de 120g de una sustancia radiactiva que pierde el 2,5 % de su masa cada día.

a) ¿Cuál será la masa de dicha sustancia después de una semana? ¿Y 30 días después? ¿Y al año?

b) Escribí una fórmula que permita calcular la masa de esta sustancia en función del tiempo. Graficá la función hallada.

34. En un triangulo rectángulo, la longitud de uno de los catetos es 2cm menor que la longitud del otro cateto. ¿Cuál de las siguientes fórmulas permite calcular el área del triángulo en función de la medida del cateto más largo?

i) $A(x) = x.(x-2)$ ii) $A(x) = x.(x+2)$ iii) $A(x) = \frac{1}{2}x(x-2)$

iv) $A(x) = \frac{1}{2}x(x+2)$ v) $A(x) = x.(x-2).(x-\frac{1}{2})$

35. Si tengo una hoja de papel rectangular de $600cm^2$ y la doblo por la mitad:

a) ¿Cuál es el área que queda visible de la hoja?

b) Si la vuelvo a doblar, ¿cuál es el área visible?

c) Con los sucesivos dobleces, ¿cómo varía el área "visible"?

d) Hallá una expresión que permita calcular el área visible sabiendo la cantidad de veces que fue doblada la hoja.

e) Realizá un gráfico aproximado de la variación del área visible del papel en función de las veces que fue doblado.

36. Una hoja de papel tiene un espesor de 0.02mm. La doblo por la mitad, la vuelvo a doblar por la mitad y así sucesivamente hasta que la pliego 50 veces sobre sí misma. ¿Qué espesor tendrá en ese caso? ¿Podemos hallar una expresión que permita calcular el espesor según la cantidad de veces que se doble?

37. La ganancia R de una empresa (en cientos de miles de pesos) a lo largo de un período de 10 años está dada por la relación: $R(t) = -\frac{5}{3}.(t-4)^2 + 30$, siendo *t* el tiempo expresado en años. ¿Cuándo han obtenido la máxima ganancia? Analizá gráficamente.

38. La percepción de la sonoridad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física I (em W/m^2) está dada por: $B = log(\frac{I}{I_0})$, donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encontrá el nivel de decibeles (sonoridad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0.

39. Cierto microrganismo se reproduce subdividiéndose en tres cada segundo. En un cultivo, mediante instrumentos electrónicos, se logra contabilizar un total de 52488 microrganismos a los 8 segundos.

a) ¿Cuántos microrganismos había inicialmente en el cultivo?

b) Representá gráficamente cómo evoluciona el cultivo, con relación al tiempo transcurrido.

c) ¿Cuál de las siguientes expresiones permite calcular la cantidad de microrganismos en el cultivo bajo estudio, según el tiempo transcurrido? Explicá el no seleccionado.

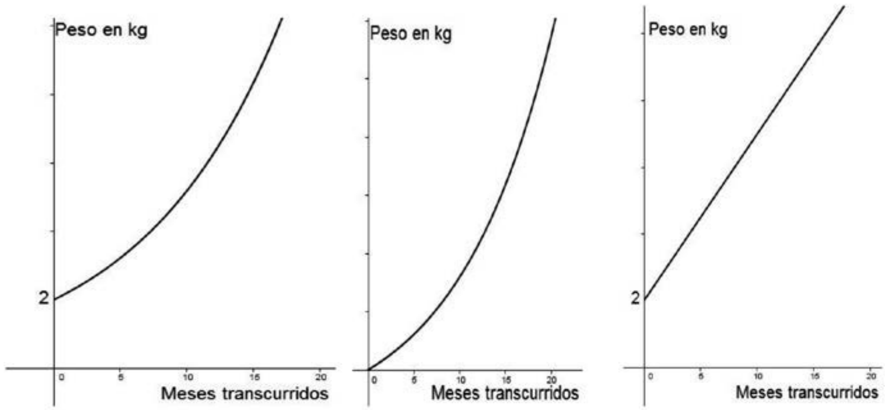
i) $f(t) = 52488 \cdot 8^t$ ii) $f(t) = 8 \cdot 3^t$ iii) $f(t) = 8 + 3 \cdot t$ iv) $f(t) = 52488 + 3t$
v) $f(t) = 8t^3$

40. En un laboratorio de biología se está estudiando la evolución del peso de una especie animal. Un ejemplar pesa 2kg al nacer. Un mes después el peso se incrementa un 10%. Durante varios meses se observa la misma tendencia, todos los meses se incrementa un 10% respecto al peso del mes anterior. Dicha tendencia se mantiene por un cierto tiempo.

a) Si el peso registrado es de 3,5kg aproximadamente, ¿cuántos meses pasaron desde el nacimiento?

b) ¿Cuál será su peso al cabo de 8 meses?

c) ¿Cuál de las siguientes representaciones gráficas se ajusta mejor a la situación planteada?



41. Las sustancias radioactivas se desintegran perdiendo masa por liberación de ciertas partículas. Se está analizando la variación de la masa de un cierto tipo de sustancia radioactiva, con una masa inicial de 4kg. Se sabe que por día se desintegra el mismo porcentaje de masa y que pasados dos días quedan 3,8416kg.

a) ¿Qué masa tendrá a los 30 días?

b) Hallá una expresión que permita calcular la masa de la sustancia radioactiva según los días transcurridos desde el inicio del análisis.

c) Representá gráficamente la variación de la masa de la sustancia en función de los días transcurridos. ¿Es una función creciente? ¿Por qué?

42. Una marca de desinfectante asegura que mata 70% de las bacterias por minuto. Se aplica el desinfectante a una muestra de bacterias y a los 5 minutos quedan vivas alrededor de 158 bacterias.

a) ¿Cuántas bacterias, por aproximación, había incialmente?

b) ¿Es cierto que a los 10 minutos quedan vivas la mitad de bacterias que había a los 5 minutos? ¿Es este resultado alrededor de 79 bacterias?

Explicá.

c) ¿Es la anterior una situación que se puede modelizar con una función creciente? ¿Por qué?

8.4.Capítulo 5:

Deporte	**Personas**
Fútbol	232
Atletismo	56
Baloncesto	52
Natación	135
Ciclismo	25

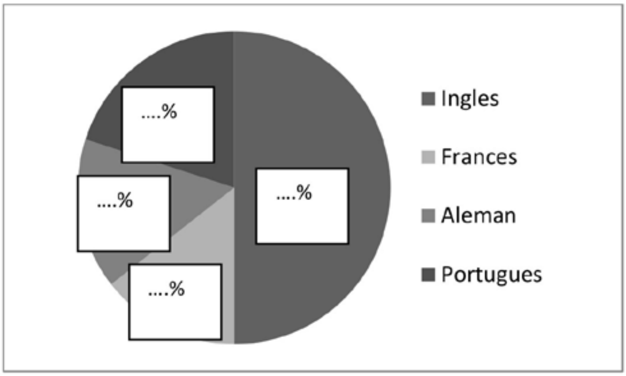
43. Se ha realizado una encuesta a 500 niños de entre 6 y 12 años sobre su deporte preferido entre fútbol, atletismo, baloncesto, natación y ciclismo. La tabla presenta los datos relevados:

a) Expresá la cantidad de niños que eligieron cada uno de los deportes como preferido, mediante una tasa (utiliza diferentes unidades para cada una). Explicá qué relación elegiste para establecer las tasas correspondientes.

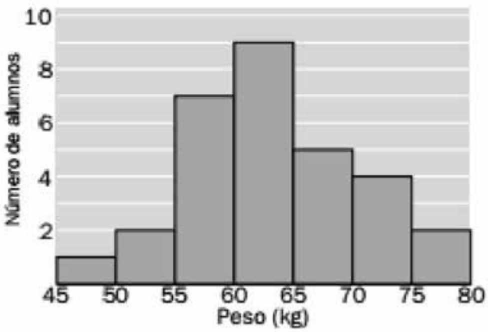
b) Elegí la representación gráfica más pertinente para la situación, justificá tu elección y realizá el gráfico.

44. Se ha consultado a un grupo de jóvenes universitarios de 20 años acerca de la preferencia por estudiar un idioma extranjero y algunos de los datos obtenidos figuran en la siguiente tabla. Completá los valores que faltan en esta y en el gráfico.

Idioma	Cantidad de jóvenes	Porcentaje
Inglés	340	50%
Francés		
Alemán	106	
Portugués	136	
Total		



45. La coordinación de educación física realizó un estudio en el cual se evaluó el peso de 30 alumnos de 3.er año de secundaria. Los datos se presentan de la siguiente forma:



Peso	N.° alumnos
[45, 50)	1
[50, 55)	2
[55, 60)	7
[60, 65)	9
[65, 70)	5
[70, 75)	4
[75, 80]	2

a) Realizá un análisis de los datos presentados: ¿corresponde el grafico a la tabla dada?

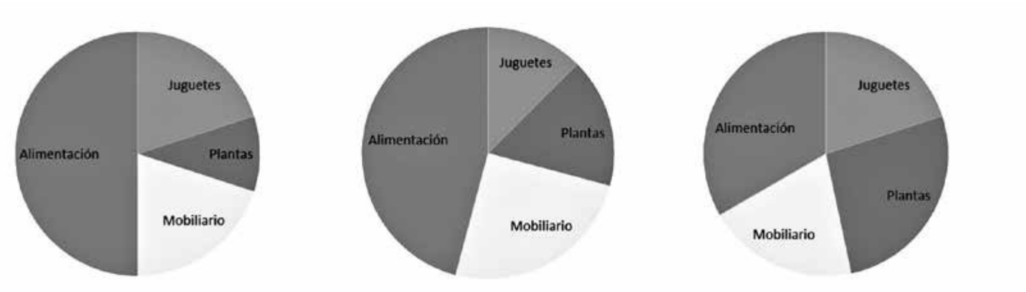
b) Estimá la mediana, media y moda de los pesos, ¿es posible calcularlas?

46. En una localidad turística se realizó un registro de todos los hoteles según la cantidad de estrellas. Los datos obtenidos son: 3, 3, 4, 3, 4, 3, 1, 3, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 4, 1.

Construí la tabla de distribución de frecuencias, realizá el diagrama que creas apropiado y justificá tu elección.

47. A continuación se presenta la información sobre las ventas mensuales de un hipermercado en pesos argentinos. ¿Cuál de los gráficos representa las ventas del hipermercado?

Juguetes	$ 750.000
Plantas	$ 1.000.000
Mobiliario	$ 1.500.000
Alimentación	$ 2.750.000



48. Un fabricante de indumentaria deportiva vende sus productos en cuatro países, a continuación se indica el porcentaje de ventas en cada uno de ellos: 5% de ventas en España, 15% de ventas en Francia, 15% en ventas en Alemania y 65% de ventas en Reino Unido.

a) Graficá la información dada en un diagrama circular.

b) ¿Se podría haber elegido un diagrama de barras para mostrar la información?

49. En un ejercicio de cálculo mental, un profesor preguntó a 26 alumnos y obtuvo las siguientes calificaciones:

Calificaciones	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencia	6	3	1	2	0	5	5	4

a) ¿Cuál es el rendimiento promedio del grupo? Encontrá también la moda y la mediana. ¿Coinciden entre sí?

b) ¿Podemos afirmar que el curso tiene un rendimiento parejo? Justificá la respuesta.

c) El profesor felicita a sus alumnos porque dice que “más de tres cuartos de la clase están por encima del promedio”. ¿Qué promedio justifica esta afirmación?

50. Los siguientes datos corresponden al diámetro de 30 bolitas, medido en centímetros:

1,738; 1,735; 1,736; 1,739; 1,733; 1,738; 1,735; 1,725; 1,736; 1,728; 1,729; 1,731; 1,735; 1,735; 1,730; 1,739; 1,729; 1,744; 1,722; 1,738; 1,740; 1,741; 1,744; 1,729; 1,741; 1,729; 1,722; 1,748; 1,746; 1,746.

a) Organizá los datos en una tabla.

b) Determiná la moda, la media aritmética, la mediana y el desvío estándar. ¿Se puede determinar si las bolitas tienen un diámetro parejo? ¿Por qué?

51. Las empresas A y B realizan envíos. Un día se registraron los pesos en kilogramos, de los paquetes que cada una de ellas transportaba.

Empresa A: 52; 29; 55; 52; 30; 46.

Empresa B: 51; 102; 29; 35; 25; 20; 46.

a) Indicá la moda de los envíos de cada una de las empresas. ¿Es representativo ese valor para los envíos que realizan?

b) Calculá la media de ambas empresas. Indicá el cálculo que realizas en cada caso.

c) ¿Cuál de las medias calculadas es más representativa de los envíos que realizan cada una de las empresas? ¿Por qué?

52. En la siguiente tabla se muestran los milímetros de lluvia medidos en dos ciudades, A y B, cada mes en el año 2015:

Mes	Mm lluvia ciudad A	Mm lluvia ciudad B
Enero	32	40
Febrero	40	38
Marzo	18	21
Abril	17	22
Mayo	15	10
Junio	15	3
Julio	14	12

Agosto	34	23
Septiembre	102	110
Octubre	77	88
Noviembre	45	56
Diciembre	91	89

a) Realizá un gráfico de barras comparando los mm de lluvia caídos en cada ciudad en cada uno de los 12 meses del año.

b) Calculá la media, la moda y la mediana para los mm de agua caída en cada una de las ciudades a lo largo de un año.

c) ¿Coinciden las distintas medidas calculadas en cada caso? ¿Cómo puede interpretarse esa cuestión?

d) Calculá la desviación típica para cada una de las ciudades y utiliza este resultado para analizar si la cantidad de lluvia media obtenida en b) logra describir las lluvias a lo largo del año en cada caso.

53. El número de goles marcados en una serie de partidos de fútbol es:

N.° de goles	1	2	3
N.° de partidos	8	8	x

a) Hallá x si la media de goles es de 2,04.

b) Si la moda de goles es 3, determina el valor más pequeño que puede tener x.

c) Si la mediana es de 2 goles, hallá el mayor valor posible de x.

54. Los números 3, 5, 7, 8 y *N* se ordenan en forma creciente. Si la media es igual a la mediana, hallá *N*.

8.5. Capítulo 6:

55. En la ciudad de Florencio Varela, Juan, Pedro y José abren en sociedad tres librerías: una, sobre la Avenida Calchaquí (llamada C); otra, sobre Camino General Belgrano (llamada B) y la tercera sobre Mosconi (llamada M). En la siguiente tabla se muestra la cantidad de libros vendidos el último mes, según su género:

	Librería C	**Librería B**	**Librería M**
Libros de ciencia	50	60	75
Libros de suspenso	80	100	125
Libros de autoayuda	35	50	40
Novelas	20	30	25

Se estima que en el próximo mes las ventas subirán un 15% en cada una de las librerías. Confeccioná una matriz que de información sobre las ventas luego del incremento.

56. Tres amigos están organizando una fiesta. Cada uno se encarga de comprar una cierta cantidad de bebidas:

Paula: 3 botellas de fernet, 1 botella de aperitivo y 6 botellas de vino espumante.

Marcelo: 4 botellas de fernet, 2 botellas de aperitivo y 5 botellas de vino espumante.

Hugo: 1 botella de fernet, 1 botella de aperitivo y 20 botellas de gaseosa Cola de 2 litros.

En el supermercado donde hicieron las compras, el fernet cuesta $85; el aperitivo, $ 50; el vino espumante, $ 30 y la gasosa Cola, $28.

a) Escribí una matriz en la que representes la cantidad de cada una de las bebidas que quiere comprar cada una de las personas.

b)Expresá mediante operaciones con matrices lo que gastaría cada persona haciendo su compra en el supermercado. ¿Tuviste que armar alguna matriz adicional? ¿Qué representan las filas y columnas en esta matriz?

57. Una fábrica produce dos modelos de lavavajillas: 3VNA1 y 3VNA2, en tres colores: blanco, gris plata y negro. La producción, en unidades, para cada modelo y color es:

3VNA1:

Blanco: 350, gris plata: 150 y negro, 45.

3VNA2:

Blanco: 250, gris plata: 120 y negro, 35.

El modelo 3VNA1 lleva 24 horas de taller y 2 horas de prueba, y el modelo 3VNA2 lleva 28 horas de taller y 1,5 horas de prueba.

a) Representá la información dada en matrices e indica el criterio que utilizaste para determinar las filas y las columnas.

b) Las ventas de la empresa disminuyeron y el gerente ordenó bajar la producción en 8%. Representá esta reducción en las unidades producidas mediante una matriz. ¿Qué operación realizaste?

58. Un productor agropecuario produce trigo, maíz, cebada y centeno en dos campos distintos: el campo Oro y el campo Sol. La siguiente tabla indica las cantidades, en toneladas, que son producidas por cada cereal en cada campo durante el mes de marzo de 2014:

	TRIGO	MAÍZ	CEBADA	CENTENO
CAMPO ORO	3	5	8	10
CAMPO SOL	4	0	2	8

a) Armá la matriz de producción que corresponde a la tabla e indicá qué dimensiones tiene dicha matriz.

b) Indicá cuántas toneladas de trigo produjo el campo Sol, ¿qué posición ocupa ese dato en la matriz?

c) En el mes de marzo del año 2015, la cosecha se redujo un 18% debido a la sequía. Escribí matricialmente los nuevos valores de producción después de esta reducción.

d) Construí una matriz que informe acerca del total de producción de cada cereal durante los años 2014 y 2015 tomados en forma conjunta.

59. Un fabricante de cosméticos fabrica cuatro tipos de productos: lápiz labial, perfume, shampoo y crema hidratante. Los cosméticos se envían a tres comercios minoristas. La cantidad de cosméticos enviados a cada comercio se muestra en la siguiente tabla:

	Comercio A	Comercio B	Comercio C
Lápiz labial	250	500	100
Perfume	150	750	250
Shampoo	250	100	750
Crema hidratante	50	50	125

a) La ganancia por la venta de cada artículo es la siguiente: lápiz labial, \$12; perfume, \$27,50; shampoo, \$12,50 y crema hidratante, \$32. Calculá el beneficio que obtiene el fabricante.

b) Supongamos que las ventas suben y el fabricante envía un 15% más de productos a cada comercio. Confeccioná una matriz que de información sobre las ventas luego del incremento.

60. En un acuario conviven peces de tres tipos de agua: tropical, fría y marina, que tienen una alimentación que consta de una mezcla de dos tipos de alimento: vivo y seco. Cada pez de la especie tropical consume por día un promedio de una unidad de alimento vivo y dos unidades de alimento seco, mientras que cada uno de los de agua fría se alimenta de dos unidades de alimento vivo y tres unidades de alimento seco, sin embargo, los de agua marina comen cuatro unidades de alimento vivo y una unidad de alimento seco.

a) Realizá una matriz A que tenga la información de cuántas unidades de cada alimento consume un pez según el tipo de agua. ¿De qué dimensión es la matriz?

b) Si en cada pecera hay 25 peces de cada tipo de agua, reformulá la matriz A para obtener otra que muestre el total de unidades de cada tipo de alimento consumido por especie. ¿Qué operación realizaste?

c) Si en el invierno todos los peces consumen un 15% más de alimento, reformulá la matriz A teniendo en cuenta este incremento. ¿Qué operación realizaste?

61. Un fabricante produce diferentes tipos de tornillos: los de cabeza cilíndrica (DIN84), los de cabeza alomada (DIN85), los cilíndricos con hexágono interior (DIN912), los de rosca madera cabeza redonda (DIN96) y los de rosca madera cabeza plana (DIN97). Estos se elaboran en dos plantas diferentes: Lanús y Lomas. En la siguiente tabla se indican las cantidades (en miles) que son fabricadas en cada planta durante el mes de marzo:

	DIN84	**DIN85**	**DIN912**	**DIN96**	**DIN97**
Planta Lanús	6	1	2,6	2	2,2
Planta Lomas	8	2	4	1,5	1,8

Las cantidades producidas, en miles, de cada artículo en cada fábrica durante el mes de abril fueron:

Planta Lomas:

DIN84: 5000, DIN85: 1500, DIN96: 1600 y DIN97: 1800.

Planta Lanús:

DIN84: 7500, DIN85: 2500, DIN96: 1500, DIN97: 1600 y DIN912: 3000.

a) Construí una matriz A que informe acerca del total de unidades de cada tipo de tornillo fabricado en las plantas de Lanús y Lomas durante los meses de marzo y abril.

b) El precio de costo por cada 1000 artículos se da en la siguiente tabla:

	DIN84	**DIN85**	**DIN912**	**DIN96**	**DIN97**
Precio de costo (cada mil)	54	60	26	25	22

Armá una matriz B que muestre el costo de fabricación de cada tipo de tornillo.

c) ¿Es posible calcular AxB? ¿Qué información proporciona el resultado?

d) ¿Podés determinar una matriz C con los datos del inciso b) de modo que puedas realizar la multiplicación entre las matrices? ¿Qué información proporciona el resultado?

62. Armar un gráfico con la siguiente información referida a los países de Europa, colocá un 1 si hay una conexión directa y un 0 si no la hay. Los datos son los presentados a continuación:

	Francia	Alemania	Italia	Suiza	Austria
Francia	0	1	1	1	0
Alemania	1	0	0	1	1
Italia	1	0	0	1	1
Suiza	1	1	1	0	1
Austria	0	1	1	1	0

63. Una empresa petrolera debe transportar el crudo a tres destilerías: El Mosquito S.A. (destilería artesanal de bebidas alcohólicas), Porta Hnos. (destilería de licores y vinagres) y Refinor (destilería refinadora y distribuidora de gas natural y petróleo crudo), ubicadas en distintos puntos del país. Las cantidades de crudo en metros cúbicos que debe transportar son de 2000 a la destilería El Mosquito S. A., 2650 a la de Porta Hnos. y 6680 a la Refinor.

Los costos del transporte por metro cúbico a cada una de las destilerías son: $ 230 para la destilería El Mosquito S. A., $ 430 para la destilería Porta Hnos. y $ 280 para la destilería Refinor.

a) ¿Cuál será el costo total del transporte del petróleo a las distintas refinerías?

b) Mostrá la información anterior en una matriz y especificá de qué dimensión es.

64. Tres familias amigas, López, Martínez y Pérez, deciden irse de vacaciones a la provincia de Córdoba, y para ello tienen la opción de elegir entre los siguientes hoteles de cuatro estrellas: Interplaza, NH Córdoba Panorama y NH Urbano.

La familia López necesita dos habitaciones dobles y una sencilla, la familia Martínez, necesita dos habitaciones dobles, una triple y una sencilla, y finalmente, la familia Pérez necesita una habitación doble y una triple.

En el hotel Interplaza, el precio de la habitación doble es de $700 por día, la habitación triple cuesta $1080 y la sencilla $400 por día. En el hotel NH Córdoba Panorama, el precio de la doble es de $ 605 por día; el de la triple, de \$850 y la simple cuesta \$350. En el hotel NH Urbano, los precios son la doble, \$780; la simple, \$420 y la triple, \$990.

a) Representá en una matriz la cantidad de habitaciones según la cantidad de plazas que necesita cada familia.

b) Expresá matricialmente el precio de cada tipo de habitación en cada uno de los tres hoteles.

c) Obtené, a partir de las dos matrices anteriores, una matriz en la que se refleje el gasto diario que tendría cada una de las tres familias en cada uno de los tres hoteles.

65. En una pastelería elaboran tres tipos de postres: Chocolate, Frutal y Dulce de leche, y utilizan para la masa: leche, huevos, azúcar y harina (entre otros ingredientes), en las cantidades que se indican:

Postre Chocolate: 3/4 de litro de leche, 100g de azúcar, 4 huevos y 250g de harina leudante.

Postre Frutal: 1/4 de litro de leche, 112g de azúcar, 7 huevos y 200g de harina leudante.

Postre Dulce de leche: 200g de azúcar, 6 huevos y 100g de harina leudante.

El precio al que se compran cada uno de los ingredientes es: \$8 el litro de leche, \$10 el kg de azúcar, \$12 la docena de huevos y \$7 el kg de harina leudante.

Obtené matricialmente el gasto que supone cada uno de estos tres postres (teniendo en cuenta solamente los tres ingredientes indicados).

66. Un hipermercado quiere ofertar tres clases de bandejas: A, B y C. La bandeja A contiene 40g de queso manchego, 160g de roquefort y 80g de camembert; la bandeja B contiene 120g de cada uno de los tres tipos de queso anteriores; y la bandeja C contiene 150g de queso manchego, 80g de roquefort y 80g de camembert. Si se quiere sacar a la venta 50 bandejas del tipo A; 80, de B y 100, de C, obtené matricialmente la cantidad que necesitarán, en kilogramos, de cada una de las tres clases de quesos.

Estar vivo es antinatural

Campos, Alberto (1978). "Experiencia, intuición, axiomatización". En: III Foro Nacional de Filosofía, 26 al 28 de julio de 1978, Bogotá.

Diez, J. y U. Moulines (2009). *Fundamentos de Filosofía de la Ciencia.* Barcelona, Ariel, 2009.

Gianella, Alicia (1995). *Introducción a la epistemología y a la metodología de la ciencia*, Buenos Aires, Ediciones de la Universidad Nacional de La Plata, 1995.

Guillen, Michael (1999). *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo. El poder y la belleza de las matemáticas.* Barcelona, Temas de Debate, 1999.

Palacios, Raúl y otros (1999). *Geo-Home-Trío & Geometría: Matemática y Filosofía.* Buenos Aires, Lumen, 1999.

Russell, Bertrand (1982). *La evolución de mi pensamiento filosófico.* Madrid, Alianza, 1982.

Sandkühler, Hans (2008). *Mundos posibles. El nacimiento de una nueva mentalidad científica.* Madrid, Akal, 2008.

Thuillier, Pierre (1990). *El saber ventrílocuo: Cómo habla la cultura a través de la ciencia.* México, Fondo de Cultura Económica, 1990.

Villella, José (2011). *Enseñar a través la resolución de problemas.* Montevideo, Espartaco, 2011.

King Kong no existe: las locuras de la semejanza

Alberti, León (2006). *De la pintura*. México D.F., Mathema, 2006.

Carrillo Yañez, J. y L. González Contreras (2000). *Resolución de problemas en los albores del siglo xxi*. Huelva, Hergué, 2000.

Doran, J. y E. Hernández (1998). *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Madrid, Addison Wesley-Universidad Autónoma de Madrid, 1998.

Flansburg, Scott (2005). *Matemáticas para todos*. Barcelona, Paidós, 2005.

Villella, José (2008). *Uno, dos, tres…geometría otra vez*. Buenos Aires, Aique, 2008.

Funciones y modelos: sobre la potencia de las variaciones

Chevallard, Y., M. Bosch y J. Gascón (2000). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Horsori, Barcelona, 1997.

Euler, Leonhard (1748). *Introductio in analysin infinitorum. Tomus primus*. Lausana, Springer, 1988.

Farfán R. y M. García (2005). "El Concepto de Función: Un Breve Recorrido Epistemológico". En: Lezama J., M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18(1), pp. 489-494.

Hanfling, Mirta (2000). "Estudio didáctico de la noción de función" En: Chemello, Graciela (coord.). *Estrategia de Enseñanza de la Matemática*. Buenos Aires, Universidad Nacional de Quilmes, 2000.

René de Cotret, Sophie (1985). *Etude historique de la notion de fonction: analyse épistémologique et expérimentation didactique*. Tesis de Maestría. Montreal, Universidad de Quebec, 1985.

Funciones. Otras modelizaciones sobre la potencia de las variaciones

Bocco, Mónica (2010), "Funciones elementales para construir modelos matemáticos". En: *Las Ciencias Naturales y la Matemática*. Buenos Aires, Instituto Nacional de Educación Tecnológica, Ministerio de Educación de la Nación, 2010.

Lial, M. y T. Hungeford (1996). *Matemáticas para administración y economía*. México D.F., Pearson Educación, 2000.

Maor, Eli (2006). *e: historia de un número*. Libraria, México D.F., 1994.

Paulos, John (1990). “Digresión: Un índice de seguridad logarítmico”. En: *El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias*. Tusquets Editores, Madrid, 1988.

Pasame el dato: sobre la potencia de la incertidumbre

Carranza, P. y J. Fuentealba (2010). “Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística”. *Unión Revista Iberoamericana de educación matemática*. N.° 24, 2010.

Kelmansky, Diana (2009). “Estadística para todos: estrategias de pensamiento y herramientas para la solución de problemas”. En : *Las Ciencias Naturales y la Matemática*. Buenos Aires, Instituto Nacional de Educación Tecnológica, Ministerio de Educación de la Nación, 2009.

Spiegel, Murray (1991). *Estadística*. Madrid, McGraw Hill/ Interamericana, 1991.

¡Cuánta información! ¿Cómo la analizamos? El poder de lo simbólico.

Anton, Howard (1994). *Introducción al álgebra lineal*. México D.F., Noriega Editores, 1998.

Collette, Jean Paul (1985). *Historia de las matemáticas.* México D.F., Siglo XXI Editores, 1986, volumen 2.

Grossman, Stanley (1993). *Álgebra lineal*. México D.F., McGraw Hill, 1996.

Kasner, E. y J. Neuman (1940). *Matemáticas e Imaginación*. Madrid, Hyspamérica Ediciones, 1985.

Lial, M. y T. Hungeford (1996). *Matemáticas para administración y economía.* México D.F., Pearson Educación, 2000.

Rossetti, Juan Pablo y otros (2010). “Aventuras matemáticas” En: *Las Ciencias Naturales y la Matemática*. Buenos Aires, Instituto Nacional de Educación Tecnológica, Ministerio de Educación de la Nación, 2010.

Varias ecuaciones lineales, ¿muchas soluciones?

Anton, Howard (1994). *Introducción al álgebra lineal*. México D.F., Noriega Editores, 1998.

Collette, Jean Paul (1985). *Historia de las matemáticas.* México D.F., Siglo XXI Editores, 1986, volumen 2.

Grcar, Joseph (2010). “How Ordinary Elimination Became Gaussian Elimination” *Historia Mathematica.*, Vol. 38, Nº 2, mayo de 2011, pp. 163-218.

Grossman, Stanley (1993). *Álgebra lineal*. México D.F., McGraw Hill, 1996.

_____________ (1991). *Aplicaciones de Álgebra lineal*. México D.F., McGraw Hill, 1993.

Lial, M. y T. Hungeford (1996). *Matemáticas para administración y economía.* México, Pearson Educación, 2000.

Martínez Mediano, J. y R. Cuadra (1997). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.* Madrid, McGraw Hill, 1997.

Paulos, John Allen (1993). “Programación lineal”. En: *Más allá de los números. Meditaciones de un matemático*. Barcelona, Tusquets Editores, 2003, Metatemas, pp. 216- 219.

Rey Lorenzo, G. y L. Fisichella (2000). *Preuniversitario: Matemática para economía.* Buenos Aires, Un Problema Resuelto, 2000.

JOSÉ A. VILLELLA. Doctor en Didáctica de la Matemática. Profesor de Matemática y Matemática Aplicada. Licenciado en Educación. Profesor para la enseñanza primaria. Es docente e investigador de la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM), donde también ocupó cargos de gestión. Integra el grupo de investigadores del Centro de Estudios en Didácticas Específicas (CEDE, UNSAM) y forma parte del equipo docente de posgrado de universidades nacionales y extranjeras. Hace investigación y docencia en la Fundación Cultural Glaux de Buenos Aires desde la que asesora en el desarrollo e implementación de proyectos educativos. Ha sido docente de nivel primario, medio y superior en formación docente (INSPT- UTN; Escuela Normal N.°2 "Mariano Acosta"). Ha recibido premios y menciones especiales por sus libros y publicaciones tanto en la Argentina como en el extranjero sobre su tema de interés: el análisis de la gestión de la clase de matemática mediada por el docente considerado un profesional de la enseñanza. Dirige las colecciones de didácticas específicas de las editoriales Espartaco (Montevideo, Uruguay) y Miño y Dávila en coedición con Unsam edita. Es asesor científico en el área de Matemática del Instituto de Estudios Iniciales de la UNAJ.

ROSA A. FERRAGINA. Lic. en la Enseñanza de las Ciencias con especialidad en Didáctica de la Matemática por la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM). Maestranda en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y la Matemática por la misma universidad. Profesora de Matemática e Informática (INSPT-UTN). Profesora en institutos terciarios de formación docente, profesorado en Matemática, CABA. Profesora de Didáctica de la Matemática en modalidad virtual, UNSAM. Integrante del CEDE (Centro de Estudios en Didácticas Específicas). Ha participado, dictando cursos y seminarios, en congresos científicos tanto en nuestro país como en el exterior. Ha publicado libros de texto para el nivel medio, preuniversitario y formación docente.

LEONARDO J. LUPINACCI. Profesor de Matemática y Matemática Aplicada, (INSPT-UTN). Licenciado en Enseñanza de las Ciencias, orientación Didáctica de la Matemática, UNSAM. Especialista y magíster en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemática (UNSAM). Docente y coordinador del área de Matemática del Instituto de Estudios Iniciales de la UNAJ. Docente investigador de Didáctica de la Matemática del Centro de Estudios en Didácticas Específicas de la Escuela de Humanidades de la UNSAM. Profesor de Didáctica de la Matemática en institutos de formación docente de la provincia de Buenos Aires. Ha participado en el dictado de talleres, cursos y en la presentación de comunicaciones en jornadas y congresos nacionales e internacionales. Autor de artículos y libros en colaboración sobre temas de su especialidad.

FERNANDO J. BIFANO. Profesor de Matemática. Lic. en Enseñanza de las Ciencias, orientación en Matemática (UNSAM). Magíster en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y la Matemática por la misma universidad. Doctorando del Programa Interinstitucional de Doctorado en Educación. Docente y cocoordinador del área de Matemática del Instituto de Estudios Iniciales de la UNAJ. Docente investigador de Didáctica de la Matemática la Escuela de Humanidades de la UNSAM. Profesor de Didáctica de la Matemática en cursos virtuales (UNSAM y UNRN). Profesor en institutos de formación docente de nivel medio y primario de la CABA. Ha participado, dictando cursos y seminarios, en diversas reuniones científicas tanto en nuestro país como en el exterior. Tiene publicado artículos y libros en colaboración, sobre temas atenientes a su especialidad.

ALEJANDRA ALMIRÓN. Profesora de Matemática, IES N.°2 “Mariano Acosta”. Licenciada en Tecnología Industrial de los Alimentos. Profesora de Matemática en el nivel medio y en el nivel medio de jóvenes y adultos. Maestra de segundo ciclo de Matemática y Ciencias Naturales. Miembro del Equipo Técnico del área de Matemática de la Dirección Operativa de Evaluación Educativa del Ministerio de Educación del GCBA. Docente de Matemática en el Instituto de Estudios Iniciales de la UNAJ. Ha participado y dictado talleres de Didáctica de la Matemática y de Educación Popular.

Coautores:

MARCELO L. ARANDA. Profesor de Matemática. Licenciando en Enseñanza de la Matemática (UTN). Realizó el curso de Diseño de Materiales Didácticos Digitales y actualmente, la Especialización Docente de Nivel Superior en Educación y TIC. Ha participado en proyecto de articulación con secundaria en la UNAJ. Se desempeña como docente en el nivel secundario, en el Instituto Superior de Formación Docente N.º 41 en la materia Matemática y su Enseñanza 1, y en la UNAJ dicta el CPU de Matemática y Matemática Inicial.

M. CAROLINA BENITO. Profesora de Matemática e Informática Educativa, (UNMdP). Realiza la Especialización en Enseñanza de la Matemática para la Escuela Secundaria (UNIPE). Ha sido jurado en las Olimpíadas Matemáticas Provinciales, (OMA). Se ha desempeñado como docente en la UNMdP, en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y en la Facultad de Ingeniería. Ha participado en el programa Fortalecimiento de la Educación Secundaria como autora de propuestas para la enseñanza de los NAP, MEN. Actualmente se desempeña como docente de Matemática en el nivel secundario, en la UNM y en el Instituto de Estudios Iniciales de la UNAJ.

ROSA M. GREJCARUK. Profesora de Matemática. Profesora de Educación Primaria. Licenciada en la Enseñanza de la Matemática (UTN). Estudiante de la Especialización en la Enseñanza de la Matemática en el nivel secundario (UNIPE). Autora de un artículo de funciones del libro de Licenciaturas de UTN. Docente del nivel secundario técnico y superior, actualmente se desempeña como docente de Matemática en el Instituto de Estudios Iniciales de la UNAJ.

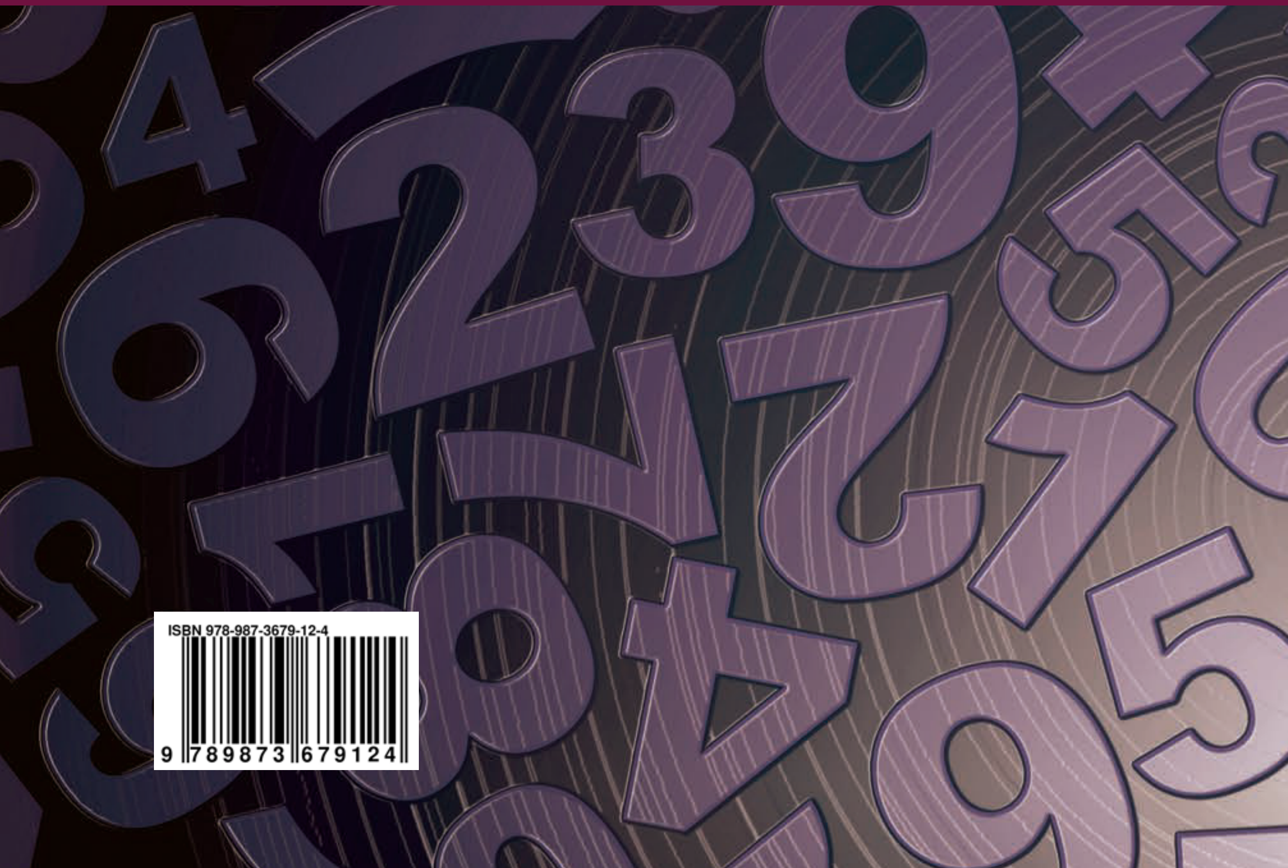
ROBERTO D. MOYANO. Licenciado en Biotecnología y Biología Molecular (UNLP). Estudiante del doctorado en Cs. Veterinarias (UNLP) y becario de Conicet. Docente del área de Matemática del Instituto de Estudios Iniciales de la UNAJ. Ha participado del dictado de cursos y presentaciones en jornadas y congresos nacionales e internacionales en el área de microbiología, veterinaria y biotecnología. Autor de artículos en su área de especialidad.

MÓNICA G. REAL. Prof. Nacional de Matemática y Cosmografía (Instituto Nacional N.° 1 de Profesores "Alicia Moreau de Justo"). Licenciatura en Matemática (Universidad Abierta Interamericana). Investigadora docente de la Universidad de Gral. Sarmiento, donde forma parte del equipo de investigación de Educación de la Matemática. Coautora de artículos sobre Heurísticas y Metacognición aplicada al área de la Matemática. Docente en la UNSAM. Docente de Matemática en el Instituto de Estudios Iniciales de la Universidad Nacional Arturo Jauretche.

MARIANA N. VIALE. Licenciada en Biotecnología (UNQ) y Doctora en Ciencias Básicas y Aplicadas de la misma casa de estudios, realiza allí mismo la Especialización en Docencia Universitaria. Becaria posdoctoral de Conicet. Ha participado como expositora en congresos y jornadas tanto nacionales como internacionales. Se desempeña como docente de Matemática en el Instituto de Estudios Iniciales de la UNAJ y de cursos de posgrado del área de Biología Molecular. Autora de artículos científicos de investigación y divulgación en revistas nacionales e internacionales.

Universidad Nacional
ARTURO JAURETCHE

Si la Matemática fuera tan sólo un conjunto de axiomas, definiciones y reglas, no podría interesar a ninguna persona inteligente... por eso afirmamos que la Matemática está presente en una variedad de situaciones de la vida cotidiana, del mundo concreto.
Este libro considera al lector y aprendiz de la Matemática como una persona capaz de analizar, razonar y comunicarse eficazmente cuando enfrenta la resolución de un problema.
Desde el Instituto de Estudios Iniciales, esperamos contribuir a derrumbar el mito de esa ciencia exclusiva, sólo para algunos, para que uds. lo usen cuando lo precisen.



ISBN 978-987-3679-12-4

9 789873 679124